前書き

　このテキストは、これから無線技術などの電気信号を扱う諸氏に対して、その数学的基礎と無線技術の基礎を与えるためのテキストです。ただ数学の専門書ではないので、数学的な厳密性に付いては、かなり省略しています。数学的な厳密性は、実際の製品を開発および設計していく技術者にとって、余り重要である内容とは思われないために省略しただけであって、これから未知の学問分野に携わろうとする研究者に不必要と言うわけではありません。厳密性を追求したい方は、より厳密な内容で書かれた数学の専門書を選ぶべきであります。

　以上のような趣旨でこのテキストは書かれていますが、目的は厳密性を追求するよりも、短期間でフーリエ解析の概要習得によりこれから更に詳しく学んでいくための基本的な知識の習得と、この分野の大まかな鳥瞰を得ることを目的としています。[6][1][2]

新原　盛太郎

目次

図目次

第 1 章

フーリエ解析の基礎

1.1　フーリエ解析の歴史

ここではフーリエ解析についての簡単な歴史について述べます。フーリエというのは、Jean-Baptiste Joseph Fourie（1768-1830）の名前に由来しています。フーリエは、フランスの物理学者及び数学者で、ナポレオンに従ってエジプトへ遠征しました。フーリエ解析は彼の著書［熱の解析理論、1822年］において初めて発表された理論で、その中で彼は熱伝導に関する理論の中でフーリエ解析を用いています。

その後ディリクレ（Peter Gustav Lejeune Dirichlet、1805-1859）やギッブス（Josiah Willard Gibbs、1830-1903）等の多くの学者により発展させられ、非常の多くの理学、工学の分野において用いられています。計算機の分野においても FFT(Fast Fourie Transform) や DFT（Digital Fourie Transform）等の新しい計算方法が開発され、信号処理に飛躍的な発展をもたらしました。

更に最近ではフーリエ解析の欠点を解消するべく wavelets と言う新たな学問が起こり、信号解析を更に発展させ、音声合成や画像処理などに用いられています。wavelets はまだ研究の途上にあり、既に一部は応用分野に対して適用はされていますが、今後更なる発展が行われるものと思われます。

ここで簡単にフーリエ解析と wavelets の違いについて簡単に述べますと、

フーリエ解析は無限のマイナス時間から無限のプラス時間を対象としているのに対して、wavelets は有限の時間を対象として取り扱っています。よってフーリエ解析は理想論であるのに対し、wavelets は現実世界を表現していることになります。ただ wavelets を取り扱うためにはリーマン積分という数学が必要となるため、高度な数学知識が必要となります。応用分野としては素粒子理論や音声合成などがあります。wavelets に関しても多数の日本語訳が発売されていますので、そちらを参照ください。[3][4][5]

1.2　周期関数

フーリエ解析の話を始める前に、周期関数と三角関数 について説明を行います。

フーリエ解析は、その歴史的発展からも、繰り返し現れる現象をどのように数学的に表現するか、と言うことから出発しています。この解析を進めるためには、まず始めに繰り返し現れる信号は、どのように表現することが出来、またどのような特徴を持っているかということを考えることから始める必要があります。

繰り返し現れるような信号を一般的に、周期関数と呼んでいます。よってフーリエ解析を考えるためには、まず始めに周期関数を考える必要があります。

周期関数の定義

周期関数とは、ある時間及びその時間の整数倍の時間を経過した後に、再び前と同じ値を繰り返す関数でなければなりません。この性質を式で表現すると、次のように与えられます。

$$f(t+T) = f(t) \tag{1.1}$$

ここで T は周期と呼ばれ、繰り返し同じ関数値が得られる時間の内、最小な時間を示す経過時間のことを言っています。この関数が成立するとき、

関数 $f(t)$ は周期関数であると呼びます。この (1.1) 式が周期関数を示すことは、グラフを考えてみると分かります。

定義の拡張

周期関数であると、その性質から周期 T の整数倍においても同じ値を示さなければなりませんので、次の関係式が成立します。

$$f(t+nT)=f(t) \tag{1.2}$$

関数の和の周期性

$f(x)$, $g(x)$ が共に同じ周期の周期関数であるとします。このときこれらの関数の和も、すぐに分かりますように周期関数です。

$$af(x+T)+bg(x+T)=af(x)+bg(x) \tag{1.3}$$

この式が成り立つのは（1.2）式から簡単に理解できると思います。

1.3　三角級数

周期関数は一般的にどのような関数として表現できるのでしょうか。周期関数がもっている性質を示す簡単な関数として思いつくのは、三角関数でしょう。よって次のような三角関数の和を考えるならば、周期関数を一般的に表現することが可能ではないでしょうか。

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0+\cos(x)+a_1\cos(2x)+\ a_2\cdots+b_1\sin(x)+b_2\sin(2x)+\ \cdots \\ &= a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right] \end{aligned} \tag{1.4}$$

ここで証明は省略しますが、このような関数の和は、確かに周期関数を表現するのに完備であることが分かっています。これがフーリエ級数の始まりです。

(1.4) 式を三角級数、その係数を級数の係数と呼んでいます。この場合周期は $T = 2\pi$ です。

第 2 章

フーリエ級数

任意の周期関数は、フーリエ級数の形で 表現することが出来ました。ここでは厳密な定義は説明しないで、主に応用を主体とした取り扱いを考えていきます。

2.1 フーリエ級数

2.1.1 周期 2π の関数

周期 2π の任意の関数は (1.4) 式から、次の式で表現することが出来ます。

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2.1}$$

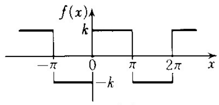
この式をフーリエ級数と呼び、その係数 a_0 , a_n , b_n をフーリエ係数と呼んでいます。

この右辺の関数のうち第一項は、電気回路で言えば直流成分を表現しており、その他の項は交流成分を表現しています。n の値が増えるにしたがって右辺の値は元の関数 $f(x)$ に近づいていきますが、その収束スピードはテイラー級数[*1]の場合ほど速くは無いことが分かっています。しかし無限大の項

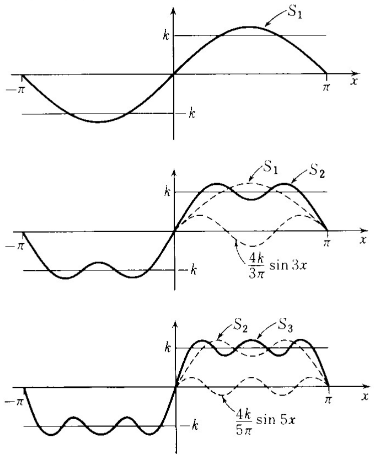
[*1] テーラー級数はある関数を考え、その値が微小変化をした時無限に続く級数の形で元の

まで考えると、元の関数と同じになります。

またここでは元の関数が特殊な不連続の場合などについては、取り扱いません。不連続の場合には特別の考察が必要となってきます。



（a）与えられた関数 $f(x)$（周期的方形波）



（b）（a）の $f(x)$ に対応するフーリエ級数の最初の 3 つの部分和

図 2.1　フーリエ級数の収束

関数を表現できるという級数のことで、詳しくは数学の本を参照ください

このフーリエ係数は、次のオイラーの公式 によって与えられます。

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \tag{2.2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \tag{2.3}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \tag{2.4}$$

これらの式は、(2.1) 式に

1. そのまま両辺を $-\pi$ から π まで積分する。
2. 両辺に $\cos nx$ を掛け $-\pi$ から π まで積分する。
3. 両辺に $\sin nx$ を掛け $-\pi$ から π まで積分する。

ことによって得られます。この証明は実際に積分することによって求められますので、計算してみてください。

2.1.2　任意の周期関数

　多くの実際問題においては、周期が 2π となっているのはまれであり、ほとんどの場合その周期は任意の周期です。ここでは任意の周期関数の場合のフーリエ級数について考えます。

関数 $f(x)$ の周期が T であるとします。このとき

$$t = \frac{T}{2\pi}x = \frac{x}{\omega} \tag{2.5}$$

という式を考えたとき、x の値が 2π 変化しますと t の値は T だけ変化します。ただし $f = 1/T$ および $\omega = 2\pi f$ としています。この x の値を (2.1) 式および (2.2) 式 ∼(2.4) 式へ代入することによって、求める式が得られることになります。また最終の公式を求めるために必要な積分範囲は、

$$-\pi \leq x \leq \pi$$

ですので、この式に代入して次のようになります。

$$-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \tag{2.6}$$

以上のことから、求める結果は次の式のようになります。

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} t \right) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \end{aligned} \tag{2.7}$$

ただし

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \frac{2n\pi t}{T} dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt \end{aligned} \tag{2.10}$$

2.2　奇関数/偶関数

一般的に任意の関数は、奇関数と偶関数とに分けることが可能です。またこれらの特殊な関数の場合には、フーリエ級数も非常に簡単に表現することが出来ます。ここではそのような関数について述べます。

次の条件を満たす関数は、各々奇関数、偶関数と呼ばれます。

$$f(-x) = -f(x) \quad (\text{奇関数}) \tag{2.11}$$

$$f(-x) = f(x) \quad (\text{偶関数}) \tag{2.12}$$

任意の関数は、次のように奇関数と偶関数とに分けることが出来ますことから、奇関数を $f_o(x)$、偶関数を $f_e(x)$ と表しますと

$$f(x) = f_o(x) + f_e(x) \tag{2.13}$$

この関係式は、一見すると分離することが難しそうに見えますが、次に式に示しますように分離することが出来ることが分かります。

この式から (2.11) 式と (2.12) 式とを用いますと、次のような関係式が得られます。

$$f_o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \tag{2.14}$$

$$f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \tag{2.15}$$

以上の結果を用いますと、フーリエ級数は非常に簡単な式となり、奇関数、偶関数の場合について次のような結論が得られます。

奇関数

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \tag{2.16}$$

ただし

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)dt \tag{2.17}$$

偶関数

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) \tag{2.18}$$

ただし

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt \tag{2.19}$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)dt \tag{2.20}$$

このように奇関数と偶関数とは、正弦波あるいは余弦波だけで表現することが出来ることが分かります。

2.3　複素数表示

　ここではフーリエ級数の複素数表示を求めます。複素数表示は、実際の応用においても良く用いられ、重要な表示です。特に電気回路においては、複素数表示が日常使われる表示として用いられており、この概念を理解しないと電気回路そのものを理解することは難しくなります。

フーリエ級数の複素数表示を求める前に、複素数と実数の関係について知っておく必要があります。複素数を表す数学記号として、i を用いています。電気の場合は、電流を i で表す習慣があるため、電気の場合は j という文字を複素数を表す記号として用います。ここでは複素数として、i を用いて表現しています。

有名な関係式として、次の式があります。

$$exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta \tag{2.21}$$

もっと一般的に与えられる式としては、次の式があります。これらの式の証明は、数学のテキストに譲りここでは成り立つこととして取り扱うことにします。

$$exp(\alpha + i\theta) = exp(\alpha)\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \tag{2.22}$$

この (2.21) 式から、次の関係が得られます。

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(exp(i\theta)+exp(-i\theta)\right) \tag{2.23}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(exp(i\theta)-exp(-i\theta)\right) \tag{2.24}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{i}\frac{exp(i\theta)-exp(-i\theta)}{exp(i\theta)+exp(-i\theta)} \tag{2.25}$$

2.3.1　複素フーリエ級数

これまで与えられた式を用いて複素フーリエ級数を求めます。(2.23)(2.24) 式をフーリエ級数を表している (2.7) 式へ代入しますと、次の式が得られます。

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n exp(in\omega t) + k_n exp(-in\omega t)\right] \tag{2.26}$$

ただし

$$c_0 = a_0 \tag{2.27}$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)exp(-in\omega t)dt \tag{2.28}$$

$$k_n = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)exp(in\omega t)dt \tag{2.29}$$

ここで (2.3) 式 (2.4) 式を用いています。(2.28) 式と (2.29) 式とを比較しますと $k_n = c_{-n}$ であることが分かります。このことと c_0 が c_n において $n = 0$ の場合で与えられるということから (2.26) 式は、次のように書きかえることが出来ます。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n exp(in\omega t) \tag{2.30}$$

この式をフーリエ級数の複素形式 と呼んでいます。またこの複素形式の

係数は、次の式によって与えられるのは明らかでしょう。

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)exp(-in\omega t)dt \tag{2.31}$$

またこれらの関数は、任意の周期関数に対して成立します。さらに (2.28) (2.29) 式から次の関係も成立します。

$$a_n = c_n + k_n \tag{2.32}$$

$$b_n = \frac{c_n - k_n}{i} \tag{2.33}$$

第 3 章

フーリエ積分

非周期的な関数に対してフーリエ級数を拡張する ことを考えます。非周期的な関数に対してフーリエ級数を求める方法として周期的な関数の周期 T を無限大へ広げていくと言う手法が取られます。そうすることによって非周期関数のフーリエ積分 が得られます。このフーリエ積分の概念は、さらに一般的な概念へと拡張されていきます。

3.1　フーリエ積分への拡張

周期 T の関数に対するフーリエ級数は、(2.7) 式で表すことが出来ました。この式において、次の変数を考えます。

$$n\omega = \frac{2n\pi}{T} \tag{3.1}$$

この式で $T \to \infty$ としますと、(3.1) が有限の値となるためには n は無限大までの任意の値を取ることになります。その結果 $n\omega$ の値は、総ての連続値を取ることになることが重要です。

ここで (2.7) 式に (2.8) 式から (2.10) 式までを代入しますと

$$f(t) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos n\omega t\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos n\omega x dx + \sin n\omega t\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin n\omega x dx\right] \tag{3.2}$$

この式の第 1 項は、関数 $f(x)$ が絶対積分可能 であるならば、つまり次の式が成立することになり、$T \to \infty$ においてゼロとなります。

$$\left|\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt\right| \leq \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|\,dt = constant$$

あらためて $\omega = 2\pi/T$ と置きますと、上の (3.2) 式は、次のように書くことができます。

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\omega\left[\cos n\omega t\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos n\omega x dx + \sin n\omega t\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin n\omega x dx\right] \tag{3.3}$$

この式において T を無限大にしますと和の ω を $d\omega$ とすることができ、次の式が得られます。

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\cos\omega t\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx + \sin\omega t\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx\right] d\omega \tag{3.4}$$

ここで、次のように置きます。

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx \tag{3.5}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx \tag{3.6}$$

この式を用いますと (3.4) 式は、次のように与えられます。

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[R(\omega)\cos\omega t + X(\omega)\sin(\omega t)\right] d\omega \tag{3.7}$$

この式がフーリエ積分です。この導き方は厳密ではありませんが、詳細は文献 [1] をみていただき、ここではこれ以上については述べません。

3.2　複素数表示

(3.4) 式は、積分を前に出しますと、次のように書きかえることが出来ます。

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\cos\omega t\cos\omega x + \sin\omega t\sin\omega x\right]dxd\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega(t-x)dxd\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega(t-x)dxd\omega \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

上の式の cos 関数を sin 関数で入れ替えた式を考えます。このことは、ω の関数として考えるならば、奇関数となり、その関数を $-\infty \sim \infty$ の間で積分するわけですので、結果はゼロとならなければならないことが分かります。

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega(t-x)dxd\omega = 0 \qquad (3.9)
$$

後の式に複素数を掛け、これら二つの式を加え合わせますと

$$
f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega(t-x)}dxd\omega \qquad (3.10)
$$

ここで次のように置きます。

$$
f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (3.11)
$$

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= R(\omega) + iX(\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

$F(\omega)$ を $f(t)$ のフーリエ変換、$f(t)$ を $F(\omega)$ のフーリエ逆変換と呼んでいます。

3.3　偶関数/奇関数

(3.11) 式 (3.12) 式を用いて、偶関数 $f_e(t)$ のフーリエ積分 は、t に関して $f_e(t)\cos\omega t$ は偶関数、$f_o(t)\sin\omega t$ は奇関数ですので、次のように簡単な式によって与えられます。

$$f_e(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} R(\omega)\cos\omega t d\omega \tag{3.13}$$

$$R(\omega) = 2\int_0^{\infty} f_e(x)\cos\omega x dx \quad , \quad X(\omega) = 0 \tag{3.14}$$

同様にして、奇関数 $f_o(t)$ の場合には次の様に与えられます。

$$f_o(t) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} X(\omega)\sin\omega t d\omega \tag{3.15}$$

$$R(\omega) = 0 \quad , \quad X(\omega) = 2\int_0^{\infty} f_o(x)\sin\omega x dx \tag{3.16}$$

3.4　実/虚時間関数

取り扱う関数は必ずしも実数であるとは限りません。一般的には複素数となります。それを次のように表します。

$$f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$$

(3.12) 式に代入すると、次の式が得られます。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t)\cos\omega t + f_2(t)\sin\omega t]\,dt \\ &\quad - i\int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t)\sin\omega t + f_2(t)\cos\omega t]\,dt \end{aligned} \tag{3.17}$$

この式から

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t)\cos\omega t + f_2(t)\sin\omega t]\,dt \tag{3.18}$$

$$X(\omega) = i\int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t)\sin\omega t + f_2(t)\cos\omega t]\,dt \tag{3.19}$$

(3.11) 式を用いれば、逆変換が求められ、次のようになります。

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[R(\omega)\cos\omega t - X(\omega)\sin\omega t]\,d\omega \tag{3.20}$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[R(\omega)\sin\omega t - X(\omega)\cos\omega t]\,d\omega \tag{3.21}$$

$$\tag{3.22}$$

3.4.1　$f(t)$ が実時間関数である場合

$f(t)$ が実時間関数である場合のフーリエ積分後の実数部 $R(\omega)$ と虚数部 $X(\omega)$ は $f_2(t) = 0$ なので (3.18) 式と (3.18) 式から

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt \tag{3.23}$$

$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt \tag{3.24}$$

と与えられます。この関係式から ω に関して $R(\omega)$ は偶関数、$X(\omega)$ は奇関数であることが分かります。よって実時間関数のフーリエ変換は、次の性質を持ちます。

$$F(-\omega) = F^*(\omega) \tag{3.25}$$

ここで $*$ は、複素共役であることを示しています。

この逆、つまり (3.25) 式が成り立てば $f(t)$ は実時間関数であることが証明できますので、(3.25) 式は関数 $f(t)$ が実時間関数であるための必要かつ十分な条件です。

3.4.2　関数 $f(t)$ が純虚時間関数である場合

関数 $f(t)$ が純虚時間関数 $f(t) = if_2(t)$ である場合には、(3.23)〜(3.25) 式に相当する式として、次のように与えられます。

$$R(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)\sin\omega t dt \tag{3.26}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)\cos\omega t dt \tag{3.27}$$

$$F(-\omega) = -F^*(\omega) \tag{3.28}$$

この関係式からは $R(\omega)$ 奇関数、$X(\omega)$ は偶関数であることが分かります。また同様 (3.28) 式が成り立てば $f(t)$ は純虚時間関数であることが直ちに証明出来ますので、(3.28) 式は、関数 $f(t)$ が純虚時間関数であるための必要かつ十分な条件です。

3.5　因果性

因果性とは、「結果の前に原因が現れることはない」ということです。そのためには何かが始まった時間を時間ゼロとした場合、それより以前においては何も生じていない、つまり式で書くと次の式で与えられます。

$$f(t) = 0 \quad t < 0 \tag{3.29}$$

この因果性と言う性質は、自然界を記述していると言うことで非常に重要な概念です。このような関数について一般的に持っている重要な性質があるので、ここで述べておきます。

因果性の性質 (3.29) 式と偶関数と奇関数の性質を用いますと、次の式が得られます。この式は、$t > 0$ のとき $f(-t) = 0$ ですので、(2.14) 式 (2.15) 式から直ちに得られます。

$$f(t) = 2f_e(t) = 2f_o(t) \quad t > 0 \tag{3.30}$$

この関係式と (3.13)(3.15) 式から

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R(\omega)\cos\omega t d\omega \tag{3.31}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty X(\omega)\sin\omega t d\omega \tag{3.32}$$

この式は $t > 0$ の時間領域のみで成立し、時間 $t = 0$ のときは次のようになります。(3.11) 式の実数部分を考えると得られます。

$$f(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty R(\omega)d\omega$$

$$= \frac{f(0^+)}{2} \tag{3.33}$$

この場合関数 $R(\omega)$ と $X(\omega)$ は、お互いに密接な関係があります。

$$X(\omega) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty R(y)\cos yt\sin\omega t dydt \tag{3.34}$$

$$R(\omega) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty X(y)\sin yt\cos\omega t dydt \tag{3.35}$$

これらの式は、(3.31) 式 (3.32) 式を (3.23) 式 (3.24) 式へ代入することによって得られます。

これから分かることは、関数が因果性を持つことによって、そのフーリエ変換の実数部分あるいは虚数部分が分かれば、もう一方の関数が求められるということです。

3.6 各種定理

ここではフーリエ積分が持っている簡単な定理について述べます。ここでフーリエ変換の記号として $\leftrightarrow$ を用いています。a , b を任意の定数、$f(t)$, $g(t)$ を任意の時間関数、$F(\omega)$, $G(\omega)$ をフーリエ変換後の関数とします。

これから示す各種定理は (3.11) (3.12) 式から得られます。

線形性　線形性という言葉は代数学で用いられている 線形性と同じ意味です。a , b が定数とします。また $f(t)$, $g(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega)$, $G(\omega)$ であるなら、次の定理が成立します。このことを線形性と呼んでいます。

$$af(t)+bg(t) \leftrightarrow aF(\omega)+bG(\omega) \tag{3.36}$$

時間伸縮　時間にある常数を掛け合わせるということは 時間軸が伸びたり縮じんだりすることを意味します。この定理はそのような伸縮に関する定理となります。a が定数の場合、次の関係式が成立します。このことを時間軸伸縮と呼びます。

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{3.37}$$

時間推移　時間変数に定数を加えたり引いたりすれば 時間軸をこの定数だけ移動することを意味します。この場合のフーリエ変換と簡単な関係式が得られます。時間が任意の量 t_0 だけ移動した場合に成り立つ関係式です。

$$f(t-t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{it_0\omega} \tag{3.38}$$

時間微分　時間に関する日分についてもフーリエ変換で簡単な関係が得られます。この関係式を用いればどのようにフーリエ変換に影響するかということを簡単に求めることができます。時間微分が存在すれば、次の関係式が成立します。

$$\frac{d^n f}{dt^n} \leftrightarrow (i\omega)^n F(\omega) \tag{3.39}$$

対称性　$f(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega)$ とします。この定理は 時間領域と周波数領域とが対称性を持っている ことを示す関係式です。

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \tag{3.40}$$

ここで f と F とが入れ替わっていることに注意しなければなりません。この関係式から、時間領域における式を周波数領域に変更するためには、2π と符号を変えることによって得られることが分かります。

周波数推移　これは時間推移に対応する関係式です。

$$e^{i\omega_0 t} f(t) \leftrightarrow F(\omega - \omega_0) \tag{3.41}$$

周波数微分　これも時間微分に対応する関係式です。

$$(-it)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} \tag{3.42}$$

共役　時間関数の複素関数 $f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$ に関する定理です。 この複素関数の複素共役とフーリエ変換の複素共役フーリエ変換との間に生じる関係式です。これは実時間関数の対称性に対応する関係式です。

$$f^*(t) \leftrightarrow F^*(-\omega) \tag{3.43}$$

モーメント　力学でよく現れるモーメントに関するフーリエ変換との 関係式ですので、力学についての色々な問題を扱う場合時間領域から簡単に周波数領域に変換できますので、非常に便利な関係式です。これは次の式で示すモーメントについて考えていきます。

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) dt \quad n = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \cdots \tag{3.44}$$

ただしこの定理は $e^{-i\omega t}$ の式を級数に展開すると、次の式が得られます。

$$e^{-i\omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^n}{n!}$$

この式を (3.11) 式に代入し (3.44) 式を用いると、次の式が得られ

ます。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^n}{n!} dt$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{\omega^n}{n!} \int_{\infty}^{\infty} t^n f(t) dt$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n m_n \frac{\omega^n}{n!} \tag{3.45}$$

(3.42) 式から左辺をフーリエ変換しますと、次の式が得られます。

$$\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} = \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^n f(t) e^{-i\omega t} dt \tag{3.46}$$

この式において $\omega \to 0$ としますと、次の式が得られます。

$$(-i)^n m_n = \frac{d^n F(0)}{d\omega^n} \quad n = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \cdots \tag{3.47}$$

$\omega \to 0$ でない場合には、(3.45) 式となりますが、モーメントにつていの簡単な式は (3.47) 式として与えられます。

3.7　畳み込み積分 (convolution)

3.7.1　畳み込み積分の基礎

畳み込み積分とは、二つの関数 $u(t)$, $v(t)$ があったとき、次のような式によって定義されます。

$$u(t) * v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) v(t-\tau) d\tau \tag{3.48}$$

この式は、次のように変形することも可能です。

$$u(t) * v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau) u(t-\tau) d\tau \tag{3.49}$$

つまり $u(t)*v(t)=v(t)*u(t)$ が成立します。(3.48) 式において t を定数としてつまり同じ時間において $t_1=t-\tau$ とすると、次のようになります。

$$\begin{aligned} u(t)*v(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t-t_1)v(t_1)dt_1 \\ &= v(t_1)*u(t_1) \end{aligned} \tag{3.50}$$

ここで改めて $t=t_1$ と置きなおせば証明ができたことになります。

3.7.2　電気回路への適用

ここでは電気回路しかも線形時不変回路について考えてみます。 入力は一つ出力は一つの回路を考えます。

時間 t における出力 $y(t)$ は、回路が線形時不変ですので、入力 $x(t)$ に対して次のように与えられます。

$$y(t)=g(t)x(t) \tag{3.51}$$

ここで入力の全ての時間における波形に対して 次 4 章で示しますサンプリング定理に従って、入力関数の最大周波数の対応する最小の時間間隔 T に区切ってみます。

次の単位インパルス関数[*1]を用いますと

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}d\omega=\delta(t)$$

入力は、次のようになります。

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} nTx(nT)\delta(t-nT)$$

この式を用いて (3.51) 式は、次のようになります。ここで $t=nT$ のところでのみ $g(t)$ は意味がありますので $g(t-nT)$ を用いなければなりませ

[*1] 振幅が 1 で幅がゼロの関数

ん。また和は積分になることにに注意が必要です。その結果次の式が得られます。

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{n=-\infty}^{n=\infty} d(nT)x(nT)g(t-nT) \\
&= \int_{n=-\infty}^{n=\infty} x(nT)g(t-nT)d(nT)
\end{aligned} \tag{3.52}
$$

ここで改めて $nT = \tau$ と置き連続関数と考えますと、(3.52) 式は畳み込み積分となっています。 両辺のフーリエ積分を求めますと、次のようになります。

$$
Y(\omega) = G(\omega) \times X(\omega) \tag{3.53}
$$

$Y(\omega)$, $G(\omega)$, $X(\omega)$ は各々 $y(t)$, $g(t)$, $x(t)$ のフーリエ変換です。$G(\omega)$ は線形時不変回路の伝達関数と呼ばれます。

第 4 章

スペクトラム

第 3 章でも出てきましたが、ここで改めてデルタ関数についてもう少し考えてみます。ここではフーリエ級数、フーリエ積分を用いて、具体的な電気回路に関する問題について考えます。まず始めに、超関数の定義から始め、次にナイキストのサンプリング定理について考えることにします。

4.1　超関数

超関数のうちインパルス関数 について考えます。インパルス関数は、その考案者の名前を取ってディラックのデルタ関数 とも呼ばれ、次のような定義によって決められています。ここではデルタ関数と言う言葉を用いることにします。

デルタ関数のその他の定義についてもいろいろありますが、詳細は文献 [6] の付録の部分をご覧ください。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\phi(t)dt = \phi(t_0) \tag{4.1}$$

このデルタ関数の n 階導関数も同様に、次の式によって定義されています。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n\delta(t-t_0)}{dt^n}\phi(t)dt = (-1)^n\frac{d^n\phi(t_0)}{dt^n} \tag{4.2}$$

デルタ関数のフーリエ変換は、(3.12) 式と (4.1) 式から容易に得られ、次の様になります。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\delta(t)dt = 1 \tag{4.3}$$

これからデルタ関数のフーリエ変換は、次の様に表示することが出来ます。

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \tag{4.4}$$

この結果から分かるように、デルタ関数のフーリエ変換は、単位 1 の実数となります。図 4.1 参照この図の時間軸において面積が 1 で幅の無い関数のことを単位インパルス関数と呼びます。

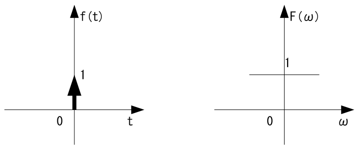


図 4.1　デルタ関数の表示

また次の関係も成立します。この式を求めるには、次の関係式が必要です。

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{\sin\omega t}{\pi t} = \delta(t) \tag{4.5}$$

この式を証明するために、次の式を考えます。

$$\lim_{\omega\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega t}{\pi t}\phi(t) = \phi(0) \tag{4.6}$$

この積分を三つの領域に分けます。つまり $\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}$ この積分の最初と最後の領域では $\omega \to \infty$ においてゼロに収束します。２番目の項は、次のようになります。

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\sin\omega t}{\pi t} &\cong \phi(0)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\sin\omega t}{\pi t} \\ &= \phi(0)\int_{-\varepsilon\omega}^{\varepsilon\omega} \frac{\sin x}{\pi x} \end{aligned} \tag{4.7}$$

ここで $\omega \to \infty$ とすると (4.5) 式が得られます。この結果から、次の式が得られます。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega t dt &= \lim_{\Omega\to\infty}\int_{-\Omega}^{\Omega} \cos\omega t d\omega \\ &= \lim_{\to} \frac{2\sin\Omega t}{t} \\ &= 2\pi\delta(t)\end{aligned} \tag{4.8}$$

この結果と対称性 (3.40) とから、次の式が得られます。

$$exp(i\omega_0 t) \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \tag{4.9}$$

また次の式が成立します。

$$\cos\omega_0 t = \frac{exp(i\omega_0 t)+exp(-i\omega_0 t)}{2} \tag{4.10}$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{exp(i\omega_0 t)-exp(-i\omega_0 t)}{2i} \tag{4.11}$$

これらの結果から、次の式が得られます。

$$\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right] \tag{4.12}$$

$$\sin\omega_0 t \leftrightarrow i\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right] \tag{4.13}$$

この二つの関係式から、実時間における正弦波/余弦波は、周波数空間においてデルタ関数で表示されるということが分かります。よってフーリエ級数によって表現されている各項は、各周波数における正弦波と余弦波の和と定数を用いて表されますので、(4.12) 式 (4.13) 式とから周波数空間においては、デルタ関数の集まりとして表すことが出来ます。

このことを式で表現してみます。まず始めに周期 T およびその整数倍の周期の集まりの周期関数を考えると、この関数は指数関数の和として (2.30) 式から、次の様に与えられました。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n exp(in\omega_0 t) \tag{4.14}$$

ただし

$n\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

この (4.14) 式に (4.12) 式を適用しますと

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(\omega - n\omega_0) \tag{4.15}$$

となります。この式がフーリエ級数を周波数空間で表現したときの式です。

この式から任意周期の周期関数のフーリエ変換は、デルタ関数の集まりとして表現できることが分かります。逆に任意周期関数のデルタ関数は簡単に求められ、(4.12) 式を用いれば簡単に時間関数が求められることがわかります。

4.2　サンプリング定理

通信工学において重要なサンプリング定理 について述べます。そのために Poisson の求和式について考えます。Poisson の求和式 とは、次のようなことを言っています。

Poisson の求和式
任意の関数 $\phi(t)$ のフーリエ変換を $\Phi(\omega)$ とすると、次の関係式が成立します。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(t+nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} exp(in\omega t)\Phi(n\omega) \tag{4.16}$$

ただし

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

(証明)
次のパルス列を考えます。

$$s_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{4.17}$$

この関数のフーリエ変換を求めます。そのために次の関数を考えます。

$$\begin{aligned}
k_N(t) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} exp(in\omega_0 t) \\
&= \frac{exp(i(N+1)\omega_0 t) - exp(-iN\omega_0 t)}{T(exp(i\omega_0 t) - 1)} \\
&= \frac{\sin(N+1/2)\omega_0 t}{T\sin(\omega_0 t/2)} \\
&= \frac{\sin(N+1/2)\omega_0 t}{Tt}\frac{t}{\sin(\omega_0 t/2)}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

この関数は、周期 $2\pi/\omega_0 = T$ の周期関数です。また次の式が成立します。

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sin(N+1/2)\omega_0 t}{Tt} = \frac{\pi}{T}\delta(t) \tag{4.19}$$

さらに $\frac{t}{\sin(\omega_0 t/2)}$ は、$(-T/2\ ,\ T/2)$ の区間で有界ですので (4.19) 式を用いて

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} k_N(t) &= \frac{\pi}{T}\frac{t}{\sin(\omega_0 t/2)}\bigg|_{t=0}\delta(t) \\
&= \delta(t)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

以上のことから、任意の時間において (4.17) 式から、次の関係式が成立します。

$$s_T(t) \leftrightarrow \omega_0 s_{\omega_0}(\omega) \tag{4.21}$$

周期関数 $f(t)$ を用いて、次の関数を考えます。

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases} \tag{4.22}$$

これから $f(t)$ は、次のように表現することが出来ます。

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t+nT) \\ &= f_0(t) * s_T(t) \end{aligned} \tag{4.23}$$

$f_0(t)$ のフーリエ変換を、次のように置きます。

$$\begin{aligned} F_0(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} f_0(t) e^{-i\omega t} dt \end{aligned} \tag{4.24}$$

(4.23) 式から

$$\begin{aligned} F(\omega) &= F_0(\omega) \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) \\ &= \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0) \delta(\omega - \omega_0) \end{aligned} \tag{4.25}$$

(4.21) 式の関数 $s_T(t)$ を用いると、任意の関数 $\phi(t)$ に対して、次のように置くことが出来ます。

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \phi(t+nT) = \phi(t) * s_T(t) \tag{4.26}$$

ここで $*$ は convolution を示しています。さらにデルタ関数の性質 $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$ であることを用います。この式のフーリエ級数を求めますと、次の様に与えられます。

$$\Phi(\omega) \frac{2\pi}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \Phi(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0) \tag{4.27}$$

この式の左辺をフーリエ逆変換した式は (4.16) 式の左辺であり、右辺は、(4.16) 式の右辺を示しています。

証明終わり

この式は一般の場合において成立しますが、$t = nT$ において関数が不連続となる場合には、正確には成り立ちません。$t = nT$ において不連続な場合には、次に示す条件を元の関数がもっている必要があります。

$$f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \tag{4.28}$$

この条件が成立する場合、Poisson の求和式は、$t < 0$ で $\phi(t) = 0$ のとき次のように与えられます。

$$\sum_0^\infty \phi(nT) = \frac{\phi(0^+)}{2} + \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty} \Phi(n\omega_n) \tag{4.29}$$

ここで次のような $t = nT$ で連続な任意の関数 $f(t)$ を考えます。この関数から大きさ (面積) が $Tf(nT)$ の等間隔パルス列から構成されている、次のような関数を考えます。

$$g(t) = T\sum_{-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT) \tag{4.30}$$

この関数のフーリエ変換は、次のように求められます。

$$G(\omega) = T\sum_{-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-inT\omega} \tag{4.31}$$

このとき $F(\omega)$ が関数 $f(t)$ のフーリエ変換であるとしますと、次の関係式が成立します。

$$G(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} F\left(\omega + \frac{2\pi n}{T}\right) \tag{4.32}$$

(証明)

(3.38) 式から、次の関係式が成立します。

$$f(t)exp(ixt) \leftrightarrow F(\omega + x) \tag{4.33}$$

$\phi(t) = f(t)e^{-i\omega t}$ と置いて $t = 0$ としたときの (4.27) 式を用いますと

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(nT)exp(-ixnT) = \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty} F\left(x + \frac{2\pi n}{T}\right) \tag{4.34}$$

この式で x に ω を代入して、(4.31) 式を用いると求める式が得られます。

サンプリング定理

信号処理において重要なサンプリング定理 は、次のように述べることが出来ます。関数 $f(t)$ のフーリエ変換が次の条件を満足するとき

$$F(\omega)=0 \qquad\qquad |\omega|\geq\omega_0 \tag{4.35}$$

元の関数 $f(t)$ は、次の式によって一意に決定されます。

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}f_n\frac{\sin(\omega_0 t-n\pi)}{\omega_0 t-n\pi} \tag{4.36}$$

ただし

$$f_n=f\left(n\frac{\pi}{\omega_0}\right) \tag{4.37}$$

(証明)

$f(t)$ に関する条件から、この関数の逆変換は、次のように与えられます。

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{4.38}$$

この式に $t=n\pi/\omega_0$ を代入しますと

$$\begin{aligned}f_n&=f\left(n\frac{\pi}{\omega_0}\right)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\infty_0}F(\omega)e^{in\pi\omega/\omega_0}d\omega\end{aligned} \tag{4.39}$$

関数 $F(\omega)$ は、周期 $2\omega_0$ で繰り返す信号とみなしてフーリエ級数に展開しますと

$$F(\omega)=\sum_{-\infty}^{\infty}A_n e^{-2n\pi\omega/2\omega_0} \tag{4.40}$$

このフーリエ級数 の係数 A_n は、次の式のようになりますので

$$A_n = \frac{1}{2\omega_0}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} F(\omega)e^{i2n\pi\omega/2\omega_0}d\omega \tag{4.41}$$

(4.39) 式より

$$A_n = \frac{\pi}{\omega_0}f_n \tag{4.42}$$

次に次式で与えられる関数を考えます。

$$G(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{\omega_0}f_n e^{-in\pi\omega/\omega_0} \tag{4.43}$$

この関数を用いると、関数 $F(\omega)$ は、次の関係式で与えられます。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= p_{\omega_0}\times G(\omega) \\ &= p_{\omega_0}\times\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{\omega_0}f_n e^{-in\pi\omega/\omega_0} \end{aligned} \tag{4.44}$$

ただし

p_{ω_0} は、区間 $|\omega| < \omega_0$ において値が 1 であるパルス関数であるとします。

ここで次の関係式が成立することを用います。

$$\frac{\omega_0}{\pi}\frac{\sin(\omega_{-}t - n\pi)}{\omega_0 t - n\pi} \leftrightarrow p_{\omega_0}e^{-in\pi\omega/\omega_0} \tag{4.45}$$

この式と (4.44) 式とを用いることにより (4.36) 式が得られます。

証明終わり

この関数 (4.45) 式は、等間隔に並んだパルス列を表現していること、(4.35) 式から分かりますように、ω_0 は、関数 $f(t)$ に含まれている周波数の内最大の値であることに注意する必要があります。同じことですが、T は、元の信号に含まれている周波数の内一番短い周期（一番周波数が高い信号の周期）

を表しています。$f_0 = 1/(2T)$ は、ナイキスト周波数 あるいはナイキスト速度、$T = 1/(2f_0)$ をナイキスト間隔と呼んでいます。

サンプリング定理を別の表現で示すと、

> 元の連続関数 $f(t)$ のフーリエ変換が、(4.35) 式で表される帯域制限された信号である場合、時間軸上で $\pi/\omega_0 = T/2$ の間隔において、その点での値が (4.37) 式で表現される f_n であるパルス列のみを用いることによって、元の連続信号が正確に再現できます

ということを言っています。

第 5 章

ラプラス変換

この章では、ラプラス変換の基礎について考えることにします。そのためにまず最初に周期関数について学んでいきます。

5.1 ラプラス変換の定義

ラプラス変換は、次の式によって定義されています。ただしこの定義式は、片側ラプラス変換と呼ばれています。

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\exp(-st)dt \tag{5.1}$$

これに対して両側ラプラス変換と呼ばれる定義式が、次のように与えられますが、この両側ラプラス変換はあまり用いられることはありません。

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-st)dt \tag{5.2}$$

その理由は、世の中の全ての現象は時間ゼロから始まる、つまり因果性と言う性質を持っているためです。因果性とは全てのあらゆる現象は原因の後に結果が現れると言うことです。このことはギリシャ時代の昔から言われてきたことですが、きちんとした理論に基づいて証明されたのは量子力学に

おいてでした。この詳しい説明については量子力学のテキストを参照願います。

以上のことにより観察が始まる時間ゼロより前には、全ての現象の結果はゼロと言うことになり、その結果片側ラプラス変換が得られます。

またラプラス逆変換は、次の式で与えられます。この式は、(5.1) 式から得られます。

$$f(t) = \int_0^\infty F(s)\exp(st)ds \tag{5.3}$$

以上の変換の中で $s = \sigma + i\omega$ は複素数です。よってラプラス変換によって、実数関数は複素関数へ変換されることになります。この様に実数関数を複素数関数へ変換することにより、複雑ではあるが数学的にはすっきりした美しい体系を形成することが出来るようになります。

ラプラス変換以外にも数多くの変換が提案されていますが、それらの変換はラプラス変換ほど用いられてはいません。ただラプラス変換、あるいは後に説明するフーリエ変換の延長線上にある wavelets において用いられている変換は、最近の音声合成、画像処理その他の物理の問題解決のために用いられており、次第にその重要性が高まってきています。この wavelets に用いられている変換については、このテキストの範囲をはるかに超えているため取り扱いません。

ラプラス変換の必要性

ラプラス変換によって、次の二つの特徴が現れます。

1. 微分･積分を代数方程式へ変換することが出来ます。この事実によって微分･積分を複雑な手順で解く必要が無くなり、単に代数の計算により簡単に方程式を解くことが出来るようになります。
2. 時間領域を複素数領域へ変換することが出来ます。変換を行うことは、上に出てきた定義から分かりますように時間で積分を行うことであり、時間のパラメータが消えてしまい、残るパラメータは複素数と

なります。よって時間領域で考えていた問題は、複素数領域で考えることが出来るようになります。このような特徴があるため、ラプラス変換は様々な工学分野における基礎数学として用いられています。

歴史

ヘビサイドにより微積分方程式を解く場合に、その理由も不明のまま使われていましたが、後ラプラスにより数学的に体系付けられました。そのためラプラス変換のことをヘビサイド変換と呼ぶ人もいます。

ラプラスと言う人は、1749 年に生まれ 1827 年に没したフランスの偉大な数学者であり、パリ大学の教授でありました。彼はポテンシャル理論の基礎を作り、天体力学、天文学一般、特殊関数、確率論の発展に大きな貢献を行いました。かの有名なナポレオンは、ラプラスの教え子の 1 人でもあります。

このような変換は、先に述べたようにその後様々な変換を生むきっかけとなりました。

ここではラプラス変換の重要な基本定理について述べます。

ラプラス変換の線形性

ラプラス変換では、次の線形性が成立します。

$$\mathscr{L}\left[af(t)+bg(t)\right]=a\mathscr{L}\left[f(t)\right]+b\mathscr{L}\left[g(t)\right] \tag{5.4}$$

(証明)

ラプラス変換の定義式から

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[af(t)+bg(t)\right]&=\int_0^\infty\left[af(t)+bg(t)\right]\exp(-st)dt\\&=a\int_0^\infty f(t)dt+b\int_0^\infty g(t)dt\\&=a\mathscr{L}\left[f(t)\right]+b\mathscr{L}\left[g(t)\right]\end{aligned}$$

となり、証明が完了します。ここで Riemann 積分の線形性が用いられて

います。

次の定理の証明を行うためには、いくつかの定義が必要になりますので、次の定理を取り扱う前に連続についての定義を述べておきます。

区分的に連続

関数 $f(t)$ が区分的に連続であるとは、関数 $f(t)$ が区間 $a \leq t \leq b$ で定義されており、その区間を有限個の部分区間に分割すると、その各部分区間で $f(t)$ が連続でかつ t を部分区間の内部から両端点へ近づけたとき、$f(t)$ が有限な極限値を持つことです。

定理 1　ラプラス変換の存在定理

$t \geq 0$ となる全ての有限区間において $f(t)$ が区分的に連続である場合、ある定数 γ と M に対して $f(t)$ が次の関係式を満足する場合、このとき $s > \gamma$ となるすべての s に対して $f(t)$ のラプラス変換が存在します。

$$|f(t)| \leq M\exp(\gamma t) \quad \text{全ての } t \text{ に対して}$$

(証明)

$f(t)$ が区分的に連続であるので、t 軸上のいかなる区間に対しても $f(t)\exp(-st)$ は積分可能です。ラプラス変換の絶対値を考えます。

$$\begin{aligned}
|\mathscr{L}[f(t)]| &= \left|\int_0^\infty f(t)\exp(-st)dt\right| \\
&\leq \int_0^\infty |f(t)|\exp(-st)dt \\
&\leq \int_0^\infty M\exp(\gamma t)\exp(-st)dt \\
&= \frac{M}{s-\gamma}
\end{aligned}$$

この結果から $s > \gamma$ が成立すると、積分が存在することになります。

第 1 移動定理

$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ であるならば

$$\mathscr{L}[\exp(\alpha t) \times f(t)] = F(s-a) \tag{5.5}$$

第 2 移動定理

$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ でありさらに

$$g(t) = \begin{matrix} f(t-\alpha) & t > \alpha \\ 0 & t < \alpha \end{matrix}$$

であるならば

$$\mathscr{L}[g(t)] \exp(-\alpha s) = F(s) \tag{5.6}$$

が成立します。

スケール変換

次の関係式が成立する。

$$\mathscr{L}[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right) \tag{5.7}$$

初期値定理

極限が存在するならば、次の定理が成立します。

$$\lim_{\tau \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} F(s) \tag{5.8}$$

最終値定理

極限が存在するならば、次の定理が成立します。

$$\lim_{\tau \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} F(s) \tag{5.9}$$

5.2　微分・積分

ここではラプラス変換の微分・積分について考えます。

5.2.1　微分

全ての $t \geq 0$ で $f(t)$ は連続で、ある γ と M に対して $|f(t)| \leq M\exp(\gamma t)$ を満足するとします。$t > 0$ の全ての有限区間で導関数が区分的に連続であるとします。$s > \gamma$ のとき導関数 $f'(t)$ のラプラス変換が存在して

$$\mathscr{L}\left[f'(t)\right] = sF(s) - f(0) \tag{5.10}$$

(証明) 全ての $t \geq 0$ に対して導関数 $f'(t)$ が連続であるとします。ラプラス変換の定義を用い、更に部分積分を行いますと

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left[f'(t)\right] &= \int_0^\infty \exp(-st) f'(t) dt \\ &= \exp(-st) f(t)|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\exp(-st)}{dt} f(t) dt \\ &- -f(0) + sF(s) \end{aligned} \tag{5.11}$$

次に導関数 が区分的に連続である場合を考えます。この場合には各区分された領域で考えますと、上記と全く同様に証明することが出来ます。

2 階以上の微分のラプラス変換

この場合には、1 階の場合と同様に部分積分を繰り返し用いることによって求める式がえられます。

$$\mathscr{L}\left[f''(t)\right] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \tag{5.12}$$

$$\mathscr{L}\left[f'''(t)\right] = s^3 - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0) \tag{5.13}$$

$$\mathscr{L}\left[f^n(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{n-1}(0) \tag{5.14}$$

5.2.2　積分

$f(t)$ が区分的に連続で、ラプラス変換が存在すれば

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s) \tag{5.15}$$

(証明)

次の関数は $f(t)$ が区分的に連続で、ラプラス変換が存在すれば連続となります。ここで次の関数を導入します。

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

よって $|f(t)| \leq M\exp(\gamma t)$ が成立しますので

$$|g(t)| \leq \int_0^t |f(\tau)|\ M\int_0^t \exp(\gamma\tau)d\tau = \frac{M}{\gamma}\left[\exp(\gamma t) - 1\right]$$

となります。$f(t)$ が不連続である点を除けば、$g'(t) = f(t)$ です。従って各有限区間で $g'(t)$ は、区分的に連続です。これから微分のラプラス変換から

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right] = \mathscr{L}\left[g'(t)\right] = sG(s) - g(0)$$

ここで $g(0) = 0$ ですので、証明が完了したことになります。

5.2.3　不定積分のラプラス変換

不定積分のラプラス変換は、

周期関数の場合には、次の式が成立します。

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[f(t)\right] &= \int_0^\infty f(t)\exp(-st)dt \\ &= \int_0^T f(t)\exp(-st)dt + \int_T^{2T} f(t)\exp(-st)dt + \cdots\end{aligned}$$

上の式で $t = \tau + nT$ と置き、$f(\tau + nT) = f(\tau)$ を用いますと

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}[f(\tau)] &= \int_0^T f(\tau)\exp(-s\tau)d\tau + \int_0^T f(\tau)\exp[-s(\tau+T)]d\tau \cdots \\
&= [1+\exp(-sT)+\exp(-2sT)+\cdots]\int_0^T f(\tau)\exp(-s\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{1-\exp(-sT)}\int_0^T f(\tau)\exp(-s\tau)d\tau
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

第 6 章

線形システム

この章では、線形システムにおいて用いられる数学の基礎について取り扱います。特にその中でフーリエ変換と ラプラス変換とについて考えることにします。

この章では、以前出てきた定理が少しダブって出てきますがそれは、理論の継続性を考えての処置ですので了承して下さい。

6.1　フーリエ変換とラプラス変換の定義

線形システムを取り扱う前に、その基となる数学的基礎から話を始めます。しかしここで述べる数学的基礎は、回路解析に必要な最低限の内容であり、詳細については数学の本を参照願います。

6.1.1　フーリエ変換 (積分)

ある時間関数は 1 対 1 の形で、フーリエ積分にて表現することが出来ます。このことを説明するために、任意の時間関数は次のディリクレーの定理が成立する場合、フーリエ級数 (6.1) 式で表現 できるという事実から始めます。

定理 2　ディリクレーの定理

区間 $(-\pi\,,\,\pi)$ で与えられた関数 $f(t)$ が、この区間でディリクレー条件を満たすとします。このときこの関数のフーリエ級数は全区間 $(-\pi\,,\,\pi)$ で収束し、この級数の和は

1. 区間 $(-\pi\,,\,\pi)$ の内部にある $f(t)$ の連続点 t においては $f(t)$ に等しい
2. 不連続点においては $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$ に等しい
3. 区間の端においては $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ に等しい

ディリクレーの条件

関数 $f(t)$ が区間 $(-\pi\,,\,\pi)$ において連続であるか、または有限個の第一種の不連続点を持つ一方、区間 $(-\pi\,,\,\pi)$ が有限個の部分区間に別れ、その各々では関数 $f(t)$ が単調に変動することを言っています。このとき関数 $f(t)$ は、次式のように展開することが出来ます。

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\exp(jk\omega_0 t) \tag{6.1}$$

ただし

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T} \tag{6.2}$$

$$|t|<\frac{T}{2} \tag{6.3}$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\exp(-jk\omega_0 t)dt \tag{6.4}$$

フーリエ変換

ここで次のようにフーリエ変換を定義します。

$$F(k\omega_0)=\lim_{T\to\infty}(Ta_k) \tag{6.5}$$

この式と (6.4) 式から、次の結果が得られます。

$$F(k\omega_0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\exp(-jk\omega_0 t)dt \tag{6.6}$$

(6.2) 式を用いて (6.1) 式は、次のように書きかえることが出来ます。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Ta_k \exp(jk\omega_0 t)\ \omega_0$$

ここで $T \to \infty$ とする。ここで (6.2) 式より $\omega_0 \to d\omega$, $k\omega_0 \to \omega$ と置きます。

和を積分に直して、この関係と (6.5) 式より

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega T) d\omega \qquad (6.7)$$

またその逆変換は、(6.6) 式より、両辺に $\exp(-j\omega T)$ を掛けたあと積分することにより、次の式として求められます。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega T) d\omega \qquad (6.8)$$

6.1.2　ラプラス変換

ここではフーリエ変換とラプラス変換との関係について簡単に述べます。フーリエ変換と関係のあるラプラス変換は、次の両側ラプラス変換です。

$$F_{II}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-st) dt \qquad (6.9)$$

この積分は $\gamma_1 < \Re(s) < \gamma_2$ の帯状領域において存在します。これについての詳細は数学のテキストを参照下さい。

ここで $s = \sigma + j\omega$ としますと (6.9) 式は、次のようになります。

$$F_{II}(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-\sigma t) \exp(-j\omega t) dt$$

この式は $f(t)\exp(-\sigma t)$ のフーリエ変換です。よってその逆変換は

$$f(t)\exp(-\sigma t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{II}(\sigma + j\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

この式の両辺に $\exp(\sigma t)$ を掛けますと、$s = \sigma + j\omega$ ですので、次の式となります。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_{II}(s)\exp(st)d\omega$$

ここで σ が一定のとき（この様に仮定した理由は、後ほど明らかになります）$s = \sigma + j\omega$ の微分を考えますと $ds = jd\omega$ となり、積分範囲に注意すると、次の結論が得られます。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} F_{II}(s)\exp(st)ds$$

この変換はラプラス逆関数と呼ばれ、一般に次の式にて与えられます。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{Br} F_{II}(s)\exp(st)ds \tag{6.10}$$

この積分の積分路 Br は、Bromwich の径路と呼ばれ $\gamma_1 < \Re(s) < \gamma_2$ の帯状領域を通ります。ここで次の複素平面図 6.1 を考えます。

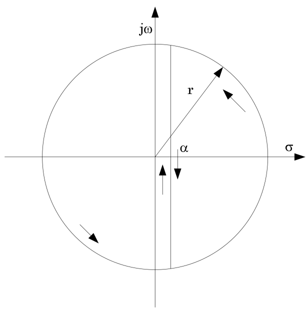


図 6.1　積分径路

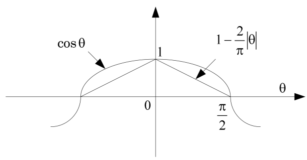


図 6.2　説明図

図 6.1 のような円を考え、この中に全ての極点を含むように大きな円を考えますと、次のような積分形式の関係式が得られます。

$$f(t) = \oint F_{II}(s)\exp(st)dt \tag{6.11}$$

定理 3　Jordan の補助定理
$t>0$ の場合を考える。このとき $s\to\infty$ ならば、$F(s)\to 0$ であるとします。このとき次の関係式が成立します。

$$\int_\Gamma F(s)\exp(st)ds \to 0 \tag{6.12}$$

ただし Γ は、図 6.1 の右半円の円弧の経路を示します。

(証明)
Γ 上での s の角度は、π を超えることはありません。実数部分 $\sigma<0$ の場合でも $\Re(s)<0$ の部分の長さは、半径を $|\sigma|$ としたときの半円 $|\sigma|\pi$ の長さより大きくはなりません。よって $F(s)\to 0$ から、この部分の積分はゼロとなります。

次に次式で与えられる微小な数値 $\varepsilon>0$ を導入します。このとき

$$|F(s)|<\varepsilon \qquad\qquad |s|>r_0 \tag{6.13}$$

となるような r_0 が存在します。ここで $s=r\exp(j\theta)$, $r=r_0$ とします。このとき次の式が成立します。

$$\begin{aligned}\left|\int_\Gamma F(s)\exp(js)ds\right| &= \left|\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F\left[r\exp(j\theta)\right]\exp\left[tr(\cos\theta+j\sin\theta)\right]jr\exp(j\theta)d\theta\right| \\ &< \varepsilon r\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\exp(tr\cos\theta)d\theta \end{aligned}\tag{6.14}$$

図 6.2 から $|\theta|\le\pi/2$ に対して $\cos\theta\ge 1-2|\theta|/\pi$ となりますので、$t<0$ を考慮して

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\exp(tr\cos\theta)d\theta &< 2\int_0^{\pi/2}\exp\left[tr(1-2\theta/\pi)\right]d\theta \\ &= \frac{\pi}{|t|r}\left[1-\exp(tr)\right] \\ &< \frac{\pi}{|t|r} \end{aligned}\tag{6.15}$$

この式から次の結果が得られます。

$$\left|\int_{\Gamma} F(s)\exp(st)ds\right| < \frac{\pi}{|t|} \to 0 \tag{6.16}$$

この補助定理から、負の時間で $s \to \infty$ のとき $F(s) \to 0$ であるならば、複素平面右半円弧上の径路における $F(s)\exp(st)$ の積分はゼロとなります。そこでこの円弧と、虚軸に平行で $\sigma = \alpha$ を通る直線で出来た閉路を考えますと、$F(s)\exp(st)$ の積分は $\sigma = \alpha$ の直線上のみによる径路で表現することが出来ることが分かります。よってこの閉路の中に含まれている極点の留数を R_k とすれば、

$$\int_{Br} F(s)\exp(st)ds = -2\pi j \sum_k R_k \tag{6.17}$$

ただし積分路は極点を左側に見るように取らねばなりませんので、Bromwich の径路を考えると右辺はマイナスがつくことに注意が必要です。

このことは時間が正の場合、同じように左半円弧を考えますと、同じ結論が得られます。このときには、図の左側の半円を考えて

$$\int_{Br} F(s)\exp(st)ds = -2\pi j \sum_k R'_k \tag{6.18}$$

(6.17) 式の左辺と (6.18) 式の左辺とを比較しますと、使われている関数は同じ式でしかも積分径路も同じとなっていますが、時間軸が違っています。マイナスの時間においては (6.17) 式、プラスの時間においては (6.18) 式を用いると便利です。しかし極が全平面上において存在するときマイナスの時間においては複素平面の右側の極のみによって、プラスの時間においては複素平面の左側の極のみによってその特性の全てが決まるわけではありません。

(6.9) 式は、次のように書くことが出来ます。

$$F_{II}(s) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\exp(-st)dt + \int_{0}^{\infty} f(t)\exp(-st)dt \tag{6.19}$$

この式の右辺第 2 項は、片側ラプラス変換と呼ばれます。$t < 0$ のとき $f(t) = 0$ となるような関数、つまり因果性 を有するような関数においては

(6.19) 式の右辺第 1 項はゼロとなり、片側ラプラス変換となります。この場合 $\Re(s) > \gamma_1$ において積分を収束させるような γ_1 が存在します。

因果性を有する関数において複素平面右半平面上に極点が存在しない場合には、右の半円周上の積分は Cauchy の定理よりゼロとなり、また Jordan の補助定理より半円弧上での積分はゼロと結論できたので、積分 径路としては虚軸に沿った積分路のみを考えるだけで関数の値が求められることになります。

もう少し分かり易く述べますと、

> 因果姓を持ち、複素平面右側に極点を持たない関数の値は、虚軸に沿った積分路を用いることにより表現することが出来、その式は (6.19) 式の右辺第 2 項で与えられます。

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\exp(-st)dt$$

6.2　線形システム

この節では、システムの線形性、普遍性、安定性、因果性などについて話を進めます。

線形性

システムの入出力が、次のように表されるとします。

$$g(t) = \mathscr{L}[f(t)] \tag{6.20}$$

システムが線形であると言うことは、二つの入力 $f_1(t)$, $f_2(t)$ に対して各々出力が $g_1(t)$, $g_2(t)$ となるとき、任意の定数 a_1 , a_2 を用いて、次のように表されるときのシステムを指しています。

$$\mathscr{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t) \tag{6.21}$$

不変性

　システムのパラメータが時間依存性を持たない場合には、次の式が成立します。

$$\mathscr{L}\left[f(t-t_0)\right]=g(t-t_0) \tag{6.22}$$

　ここで

t_0：任意の時間定数

$f(t)$：入力

$g(s)$：出力

　この式はシステムを表す微分方程式等の係数が、時間依存性を持たないことを意味しています。

　デルタ関数に対するシステムの応答を、次のように置きます。

$$\mathscr{L}\left[\delta(t)\right]=h(s) \tag{6.23}$$

　更に任意の関数はデルタ関数を用いて、次のように一般的に書くことが出来ます。

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{6.24}$$

　この式の両辺にラプラス演算子 $\mathscr{L}$ を掛けると

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right]=\mathscr{L}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

　線形である場合この式の右辺は、

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\mathscr{L}\left[\delta(t-\tau)\right]d\tau$$

　となり (6.22)(6.23) 式を用いて、次の結果が得られます。

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{6.25}$$

この式から分かりますことは、線形性と不変性とが満足されると任意の入力に対するシステムの応答は、入力信号と応答関数のコンボリューションによって与えられるということです。

正弦波入力信号

ここで入力信号として、$\exp(j\omega t)$ を考えます。この信号に対する応答を、次のように置きます。

$$\mathscr{H}\left[\exp(j\omega t)\right] = g(t) \tag{6.26}$$

この式で $t \to t+t_0$ と置きますと、t_0 は定数ですので線形性から

$$\begin{aligned}\mathscr{H}\left\{\exp\left[j\omega(t-t_0)\right]\right\} &= \exp(j\omega t_0)\mathscr{H}\left[\exp(j\omega t)\right] \\ &= \exp(j\omega t_0)g(t) \\ &= g(t+t_0)\end{aligned} \tag{6.27}$$

ここで $t=0$ と置きますと，(6.27) 式は、

$$g(t_0) = g(0)\exp(j\omega t_0) \tag{6.28}$$

ここで t_0 は任意の時間定数ですので、あらためて t と置き直すことが出来ます。よって次の結論が得られます。

$$g(t_0) = g(0)\exp(j\omega t) \tag{6.29}$$

この結果は、任意の角周波数による入力と同じ角周波数の出力が得られることを示しています。また (6.26) 式から、$t=0$ と置きますと

$$\mathscr{H}(1) = g(0) \tag{6.30}$$

となるので (6.29) 式は、次のように書き換えられます。

$$g(t) = \mathscr{H}(1)\exp(j\omega t) \tag{6.31}$$

この式は正弦波入力信号に対する応答が、単位ステップに対する応答と正弦波信号との積によって表されることを意味しています。

安定性

安定性については別のところで更に詳しく述べますが、ここでは簡単に安定性について触れておきます。線形システムでの安定性とは、任意の有限な入力に対して、その応答が有限である場合、そのシステムは安定であると言われます。この定義はシステムのデルタ関数の応答 $h(t)$ が、次の条件を満足することと同値となります。この式は (6.6) 式から簡単に求められます。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty \tag{6.32}$$

因果性

システムが $t < 0$ において入力がゼロであるとき、その出力もゼロとなる場合システムは因果性を持っていると言います。

システムが因果性であるとは、次の式が成立することです。

$$\mathscr{H}(0) = 0 \tag{6.33}$$

(6.25) 式において $f(t)$ が因果関数であるならば、$t < 0$ において $f(t) = 0$ でなければならなりませんので、次の式がなりたちます。

$$\int_{0}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0 \tag{6.34}$$

この式で $f(t)$ は任意の関数ですので、$h(t) = 0$ とならなければなりません。よって線形性、不変性が成立するシステムのデルタ関数の応答関数は、$t < 0$ において $h(t) = 0$ となります。つまり因果性となります。

このとき (6.25) 式は、次のようになります。

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{0}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \end{aligned} \tag{6.35}$$

この式は、次のように解釈することが出来ます。因果性を有するシステムにおいてデルタ関数の応答特性が分かっていれば、$-\infty < t \leq t_0$ に対する入力によって $t = t_0$ の出力特性を一意に決定することが出来ます。

6.3　システム関数

ここでは回路理論において重要なシステム関数の定義と、システム関数が持っている因果性などについて話を進めます。

(6.25) 式の両辺のフーリエ変換を考えます。

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\exp(-j\omega t)dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\exp(-j\omega t)dtd\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\times\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\exp\left[-j\omega(t-\tau)\right]dt\right\}\exp(-j\omega\tau)d\tau \end{aligned} \tag{6.36}$$

ここで次のように定義します。

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\exp(-j\omega t)dt \tag{6.37}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt \tag{6.38}$$

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\exp\left[-j\omega(t-\tau)\right]dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\exp(-j\omega t)dt \end{aligned} \tag{6.39}$$

そうすると (6.36) 式は、次のように置くことが出来ます。

$$G(\omega) = H(\omega)F(\omega) \tag{6.40}$$

入力信号を、次のように置きます。

$$f(t) = \exp(j\omega t) \tag{6.41}$$

すると (6.40) 式は、デルタ関数を用いて次のようになります。

$$F(\omega)2\pi\delta(\omega-\omega_0) \tag{6.42}$$

(6.40) 式の逆変換を考え、(6.42) 式を用います。

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)H(\omega)\exp(j\omega t)d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)H(\omega)\exp(j\omega t)d\omega \\ &= H(\omega_0)\exp(j\omega_0 t) \end{aligned} \tag{6.43}$$

この式で $\omega_0 \to \omega$ と書き直して (6.31) 式と比較しますと $g(0) = H(\omega)$ となり、(6.21) 式より次の結論が得られます。

$$g(t) = H(\omega)\exp(j\omega t) \tag{6.44}$$

ここで出てきた関数 $H(\omega)$ のことをシステム関数と呼んでいます。この式は、複素指数関数の入力信号に対する応答は、システム関数と入力信号とを掛け合わせることによって得られることを示しています。

6.3.1　因果性と偶奇性

前の節で関数 $h(t)$ に因果性を持たせることが出来ることが分かりました。更に任意の関数は偶関数と奇関数との和で表現することが出来ます。よって関数 $h(t)$ を偶関数（添え字 e）と奇関数（添え字 o）を用いて表現しますと

$$h(t) = h_e(t) + h_o(t) \tag{6.45}$$

この式から、次の式が得られます。

$$h(-t) = h_e(t) - h_o(t) \tag{6.46}$$

(6.45)(6.46) 式より

$$h_e(t) = \frac{h(t)+h(-t)}{2} \tag{6.47}$$

$$h_o(t) = \frac{h(t)-h(-t)}{2} \tag{6.48}$$

また $h(t)$ のフーリエ変換の (6.39) 式から

$$\begin{aligned}H(\omega) &= R(\omega)+jX(\omega)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cos(\omega t)dt - j\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\sin(\omega t)dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [h_e(t)+h_o(t)]\cos(\omega t)dt - j\int_{-\infty}^{\infty} [h_e(t)+h_o(t)]\sin(\omega t)dt\end{aligned}$$

この式の中で積分の中が奇関数になる項は、積分をするとゼロとなりますので、最終的に次の式が得られます。

$$\begin{aligned}R(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_e(t)\cos(\omega t)dt\\ X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_o(t)\sin(\omega t)dt \qquad (6.49)\end{aligned}$$

因果関数の場合には $t>0$ のとき $h(-t)=0$ ですので

$$h(t) = 2h_e(t) = 2h_o(t) \qquad (6.50)$$

となり、因果性関数の場合には偶関数を用いても奇関数を用いても求められることになります。

(6.49) 式を用いると

$$\begin{aligned}h(t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} R(\omega)\cos(\omega t)d\omega\\ &= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} X(\omega)\sin(\omega t)dt \qquad (6.51)\end{aligned}$$

6.3.2　実時間関数と虚数時間関数

因果性などに関係なく、任意の関数は一般に複素数と考えられます。その複素関数を、次のように置きます。

$$f(t) = f_r(t) + jf_i(t) \qquad (6.52)$$

この式と (6.8) 式から

$$f_r(t)+jf_i(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega t)+jX(\omega t)]\,[\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)]\,d\omega (6.53)$$

この式から

$$f_r(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[R(\omega t)\cos(\omega t) - X(\omega t)\sin(\omega t)]\,d\omega \tag{6.54}$$

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[R(\omega t)\sin(\omega t) + X(\omega t)\cos(\omega t)]\,d\omega \tag{6.55}$$

この場合の逆変換は、次のようになります。

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}[f_r(t)\cos(\omega t) + f_i(t)\sin(\omega t)]\,dt \tag{6.56}$$

$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty}[f_r(t)\sin(\omega t) - f_i(t)\cos(\omega t)]\,dt \tag{6.57}$$

(6.56)(6.57) 式から、$f(t)$ が実時間関数の場合には

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt \tag{6.58}$$

$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt \tag{6.59}$$

この式から $R(\omega)$ は偶関数、$X(\omega)$ は奇関数であることが分かります。よって $F(-\omega) = F^*(\omega)$ となります。

(6.56)(6.57) 式から、$f(t)$ が虚数時間関数の場合には

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt \tag{6.60}$$

$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt \tag{6.61}$$

この式から $R(\omega)$ は奇関数、$X(\omega)$ は、偶関数であることが分かります。よって $F(-\omega) = -F^*(\omega)$

ここで $f(t) = h(t)$ である実時間の因果性関数を考えます。(6.51) 式を (6.58) 式 もしくは (6.59) 式へ代入しますと

$$R(\omega) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{infty}\int_0^{\infty} X(x)\sin(xt)\cos(\omega t)dxdt \tag{6.62}$$

$$X(\omega) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{infty}\int_0^{\infty} R(x)\cos(xt)\sin(\omega t)dxdt \tag{6.63}$$

このように実時間関数でしかも因果関数の場合には、フーリエ変換された関数の実部と虚部はお互いに導くことが出来ます。よって実部もしくは虚部の関数が分かれば、全ての関数は求められることになります。これについてはヒルベルト変換として知られているもっと簡略な方程式が存在します。ここに結果だけを書いておきます。

$$R(\omega_0) = R(\infty) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \tag{6.64}$$

$$X(\omega_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \tag{6.65}$$

6.4　フーリエ変換とラプラス変換の関係

ここではフーリエ変換とラプラス変換との関係について考えます。これらの間の関係を考えるとき共に因果性を持った関数について考えることにします。因果関数のフーリエ変換は、次のようになります。

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)\exp(-i\omega t)dt \tag{6.66}$$

因果関数のラプラス変換は片側ラプラス変換と呼ばれ、次式で与えられます。

$$F_I(s) = \int_0^{\infty} f(t)\exp(-st)dt \tag{6.67}$$

定理 4　ラプラス変換の存在定理
$f(t)$ のラプラス変換が、ある定数 γ と M に対して $\Re(s) > \gamma$ である全ての s に対して存在するための十分条件は、$t \geq 0$ の全ての有限区間で、次の条件を満たすときです。

1. $f(t)$ が区分的に連続である
2. $|f(t)| \leq M\exp(\gamma t)$

（証明）

$f(t)$ が区分的に連続ですので、t 軸上のいかなる区間においても $f(t)\exp(-st)$ は積分可能となります。また二番目の式から

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty f(t)\exp(-st)dt\right| &\leq \int_0^\infty |f(t)|\exp\left[-\Re(s)t\right]dt \\ &\leq \int_0^\infty M\exp\left\{-\left[\Re(s)-\gamma\right]\right\}dt \\ &= \frac{M}{\Re(s)-\gamma}\end{aligned}$$

この積分が存在するためには、$\Re(s)>\gamma$ でなければなりません。

関数 $t^{-1/2}$ は、$t=0$ で無限大となりますが、ラプラス変換は $\sqrt{\pi/s}$ という形で存在しますので、上の条件は十分条件ではあっても必要条件ではありません。

6.4.1　ラプラス変換からフーリエ変換

この誘導は、三つの場合に分けて考えなければなりません。

ラプラス変換の収束領域に虚軸を含む場合

この場合には積分路が同じとなりますので、次の式が成立します。

$$F(\omega)=F_I(i\omega) \tag{6.68}$$

つまり $s=i\omega$ とすることにより、(6.67) 式から (6.66) 式が得られます。

$s=j\omega$ の式を見て分かりますように、複素数 s の実数う部分が消えています。つまり因果関係があると実数部分が消滅することになります。

ラプラス変換の収束領域に虚軸が存在しない場合

この場合にはフーリエ変換は存在しません。フーリエ変換は、虚軸上での積分ですので、積分経路が存在しない積分は当然存在せず、結局フーリエ変

換は存在しません。

ラプラス変換の収束領域の端に虚軸が存在する場合

この場合は、複素平面右半平面では収束するが特異点の少なくとも一つが虚軸上に存在する場合に相当します。次の虚軸上に、一つの特異点を有する関数を考えます。

$$F_I(s) = \frac{1}{s - i\omega_0} \tag{6.69}$$

この関数は、因果関数 $f(t) = U(t)\exp(i\omega_0 t)$ のラプラス変換です。ただし $U(t)$ は、ユニット関数です。フーリエ変換との関係は、この $f(t)$ のフーリエ変換を求めることによって得られ、次のように与えられます。

$$F(\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{i(\omega - \omega_0)} \tag{6.70}$$

以上より、次の結果が得られます。

$$F(\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + F_I(i\omega) \tag{6.71}$$

多重極の場合

結論だけを述べます。

$$F(\omega) = \frac{\pi j^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{n-1}(\omega - \omega_0) + F_I(j\omega) \tag{6.72}$$

ただし

$$F_I(s) = \frac{1}{(s - j\omega_0)^n} \tag{6.73}$$

n 個の単純極を持つ関数の場合

結論だけを述べます。

$$F(\omega) = \pi\sum_{k=1}^{n} a_k\delta(\omega - \omega_k) + F_I(j\omega) \tag{6.74}$$

ただし

$$F_(s) = G(s) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s - j\omega_k} \tag{6.75}$$

6.4.2　フーリエ変換からラプラス変換

フーリエ変換が存在するならば、$\Re(s) > 0$ に対してラプラス変換は解析的となります。

ラプラス変換が $\Re(s) = 0$ のとき

つまり虚軸上の積分路において存在し、$F(\omega)$ が解析関数であるならば $\Re(s) \geq 0$ に対して、つまり虚軸を含む右半平面において $\omega = s/j$ と置くことにより、ラプラス変換 $F_I(\omega)$ はフーリエ変換 $F(\omega)$ から次の式によって得られます。

$$F_I(s) = F\left(\frac{s}{i}\right) \tag{6.76}$$

ラプラス変換が $\Re(s) = 0$ 上に収束領域の端が存在する場合

このとき $s = \sigma + i\omega$ としてラプラス変換を、次のように置きます。

$$F_I(\sigma + i\omega) = \int_0^{\infty} \exp(-\sigma t) f(t) \exp(-i\omega t) dt \tag{6.77}$$

ただし

$$\Re(s) = \sigma > 0$$

(6.77) 式は、因果関数 $\exp(-\sigma t) f(t) U(t)$ のフーリエ変換とみなすことが出来ます。この関数のうち関数 $\exp(-\sigma t) U(t)$ のフーリエ変換は、$(\sigma + j\omega)^{-1}$ と与えられ、更に $F(\omega)$ を因果関数 $f(t)$ の Fourie 変換とすれば時間関数の

掛け算 (6.12) 式は、次のコンボリューションで与えられます。

$$F_I(\sigma+i\omega) = \frac{1}{2\pi}F(\omega)*\frac{1}{s+i\omega}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)}{\sigma+j(\omega-x)}dx \tag{6.78}$$

この式から $\sigma+i\omega=s$ と置き、改めて $x=\omega$ と置きます。積分は虚軸上を考えていますので、$F(\omega)=F_I(0\ ,\ \omega)$ と置き換えることが出来、次の結果が得られます。

$$F_I(s) = \frac{1}{1\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_I(0\ ,\ \omega)}{s-i\omega} \tag{6.79}$$

因果関数のときに成立する (6.49) (6.50) 式から、次の式が成立します。

$$H(\omega) = 2H_e(\omega) = 2iH(\omega) \tag{6.80}$$

ただし

$$H_e(\omega) = R)\omega)\ ,\ H_o(\omega) = X(\omega) \tag{6.81}$$

この式を (6.79) 式へ代入しますと、

$$F_I(s) = \frac{1}{\pi}\int -\infty^{\infty}\frac{R(\omega)}{s-j\omega}$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X(\omega)}{s-j\omega} \tag{6.82}$$

ただし原点に特異点が無いとします。特異点が存在する場合には、デルタ関数が入ってくるので別に扱わねばなりません。

6.5　因果性の条件

この節では、どのような場合に因果性があるかと言うことについて考えてみます。つまり与えられた因果関数 $h(t)$ のフーリエ変換 $H(\omega)$ が満足しな

ければならない条件は何かと言うことです。このことについての一般的な結論は得られていません。

まず前提条件として、次の式が成立する関数について取り扱うものとします。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega < \infty \tag{6.83}$$

この式は、有限のエネルギーを持つ関数であることを意味しています。よってこの節の定理等はデルタ関数を含むような関数については取り扱うことが出来ません。もしその様な特異な関数を取り扱うのであれば、元の関数からデルタ関数などの特異な関数を取り除いて考える必要があります。以上の手続きを行いますと、次の定理が成り立ちます。

定理 5　次の三つの条件が成り立つとき、$H(\omega)$ は因果関数 $h(t)$ のフーリエ変換となります。

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega < \infty \tag{6.84}$$
2. $\Re(s) \geq 0$ において $H\left(\frac{s}{i}\right)$ は、解析的である。
3. $s \to \infty$ のとき $H\left(\frac{s}{i}\right) \to \infty$

（証明）

条件 1 から

$$\begin{aligned} |h(t)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)| d\omega \\ &\leq \infty \end{aligned} \tag{6.85}$$

よって全ての時間において、$h(t)$ は存在します。

次に複素平面右半平面に対する $H(s/i)$ の複素積分を考えます。条件 2 からその積分の内部で解析的ですので、積分経路の半円弧を Γ としますと

$$i\int_{-\Omega}^{\Omega} H(\omega)\exp(j\omega t)d\omega + \int_{\Gamma} H\left(\frac{s}{i}\right)\exp(st)ds = 0 \tag{6.86}$$

$\Omega \to \infty$ のとき $t<0$ の場合、条件 3 と Jordan の補助定理より (6.6) 式の左辺の第 2 項はゼロとなるので、第 1 項もゼロとなり (6.85) 式から $t<0$ のとき $h(t)=0$ となり因果関数であることが証明できます。

条件 3 が成立しない場合でも、次の式が成立する場合には、$t<t_0$ に対して因果関数となります。

$$H\left(\frac{s}{i}\right)\exp(-st_0) \qquad s\to\infty \tag{6.87}$$

これについての証明は、全く同様に行うことが出来ます。

定理 6　Paley-Wiener の条件

(6.84) 式が成立する関数において、元の時間関数が因果関数となるための必要十分条件は、次の式で与えられます。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|H(i\omega)||}{1-\omega^2} d\omega < \infty \tag{6.88}$$

（証明）

$H(\omega)=|H(\omega)|\exp[-i\theta(\omega)]$ となる解析関数が存在すれば、先に説明した定理から $H(\omega)$ の逆変換は因果関数であることが分かります。よってこの様な $\theta(\omega)$ が存在すれば、十分性が証明できたことになります。ここで次の関数を導入します。

$$\ln[H(\omega)] = \alpha(\omega) + i\theta(\omega) \tag{6.89}$$

この式の右辺の関数は、次の条件が成立します。

$$\alpha(-\omega)=\alpha(\omega)\ ,\ \theta(-\omega)=-\theta(\omega) \tag{6.90}$$

これは (6.89) 式から、次の式が得られ $R(\omega)$ は偶関数、$\theta(\omega)$ は奇関数であることから明らかです。

$$\alpha(\omega) = \frac{\ln\left[R^2(\omega)+X^2(\omega)\right]}{2}\ ,\ \theta(\omega) = \tan^{-1}\left[\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right] \tag{6.91}$$

ここで次のような変換を行います。

$$\omega = \tan\left(\frac{\delta}{2}\right) \tag{6.92}$$

この式の微分を取りますと、

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{d\delta}{2\cos^2(\delta/2)} \\ &= \frac{1+\tan^2(\delta/2)}{2}d\delta \\ &= \frac{1+\omega^2}{2}d\delta \end{aligned} \tag{6.93}$$

この式を用いますと、(6.88) 式は次のように与えられます。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha\tan(\delta/2)|\, d\delta < \infty \tag{6.94}$$

この結果から $\alpha\tan(\delta/2)$ は収束し、Fourie 級数に展開することが可能となります。

$$\alpha\tan(\delta/2) = a_0 + a_1\cos\delta + a_2\cos(2\delta) + \cdots \tag{6.95}$$

ここで角周波数を用いた、次の級数を考えます。

$$F(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots \tag{6.96}$$

この式と (6.95) 式とを比較しますと、$F(1) = \alpha(0)$ であり、$|\cos(n\delta)| \le 0$ ですので、(6.96) 式は $|\zeta| \le 1$ で収束つまり解析関数となります。よって (6.96) 式は、単位円の内部で収束することが分かります。

ここで次の変換を考えます。

$$\zeta = \frac{1+s}{1-s} \tag{6.97}$$

この変換は単位円を s の右半平面へ写像しますので、単位円の内部で解析的である関数 $F(\zeta)$ は、この変換により右半平面で解析的となります。

$$Z(s) = F\left(\frac{1+s}{1-s}\right) \tag{6.98}$$

ここで虚軸上の点について考えます。$s = j\omega$ と置いて、(6.92) 式を用いますと、(6.97) 式は次のようになります。

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1-i\tan(\delta/2)}{1+i\tan(\delta/2)} \\ &= \exp(-i\delta) \end{aligned} \tag{6.99}$$

よって (6.98) 式は、(6.96) 式を用いて

$$Z(i\omega) = a_0 + a_1\exp(-i\delta) + a_2\exp(-2i\delta) + \cdots \tag{6.100}$$

この式と (6.95) 式から

$$\begin{aligned} \Re[Z(j\omega)] &= a_0 + a_1\cos\delta + a_2\cos(2\delta) + \cdots \\ &= \alpha\tan)\delta/2) \end{aligned} \tag{6.101}$$

この式と (6.9) 式を用いますと、次の関数は虚軸上で解析関数となります。

$$|H(\omega)| = \exp\{\Re[Z(j\omega)]\} \tag{6.102}$$

このことから $i\omega = s$ と置くことが出来、先の定理の式 (6.80)(6.81) 式が成立し、因果性となります。これで十分性が証明できました。次に必要性について、説明を行います。

$\alpha(\omega) = \ln|H(\omega)|$ と置き、次の関数を導入します。

$$\alpha^+(\omega) = \begin{cases} \alpha(\omega) & \alpha(\omega) > 0 \\ 0 & \alpha(\omega) < 0 \end{cases} \tag{6.103}$$

$|H(\omega)| \geq 1$ の場合 $\ln|H(\omega)| = \alpha^+(\omega) \geq 0$ ですので、

$$|H(\omega)|^2 = \exp[] > 2\alpha^+(\omega)$$

となり、次の式が成立します。

$$\begin{aligned}\infty &> \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \\ &> \int_{-\infty}^{\infty} 2\alpha^+(\omega) d\omega \\ &> 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^+(\omega)}{1+\omega^2} d\omega \end{aligned} \tag{6.104}$$

(6.103) 式から (6.88) 式の被積分関数の正の部分は、収束することが分かります。

後は被積分関数の負の部分について証明しなければなりません。後の章で証明しますように $|H(\omega)|$ は、最小位相推移関数と全域通過関数の積で表すことが出来ます。最小位相推移関数を $H_m(\omega)$ としますと $|H(\omega)| = |H_m(\omega)|$ です。次の関数を考えます。

$$\frac{\ln H_m(s)}{1-s} \tag{6.105}$$

この関数は $H_m(\omega)$ が最小位相推移関数ですので、極点が無く、極点は分母の $s=1$ にのみ存在します。この点での留数の値は、$-\ln[H_m(1)]/2$ となります。複素平面右半平面上を囲む半円での積分を考えますと、

$$\oint_C \frac{\ln[H_m(s)]}{1-s^2} ds = \frac{j\pi}{\ln[H_m(1)]} \tag{6.106}$$

この積分経路のうち半径を無限大としたときの円弧部分の積分は、ゼロとなりますので上の式は、次のように書くことが出来、(6.88) 式が成立し、証明が完了となります。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln[H_m(j\omega)]}{1+\omega^2} &= \frac{\pi}{\ln[H_m(1)]} \\ &< \infty\end{aligned} \tag{6.107}$$

第 7 章

回路への応用

ここでは電気回路へのフーリエ変換やラプラス変換の応用について議論しています。

7.1 電気回路での表現

電気の問題を考える時に、回路をどのように表現するかということが重要になります。直感的に最初に考える表現方法は時間について表現する方法でしょう。しかし時間について表現しようとすると容量やコイルが含まれている場合には必ず微分や積分が入ってこざるを得ません。その結果回路の動作を求めようとすると複雑な微分積分方程式を解くことになり、非常に大変な作業となります。

回路は通常電源を投入する前は最初の状態として容量の殿下はゼロでコイルの電流はゼロから始まることが多いわけですので、微分方程式での初期値はゼロからスタートします。またある程度電源を投入してから時間が経った後のいわゆる定常状態と呼ばれる状態では初期状態は関係がなくなります。つまり微積分方程式での初期状態は、いわゆる過渡的な応答を求めることがない限り、初期状態は必要がありません。このことから回路を微積分で表現するよりも初期状態を無視したフーリエ解析やラプラス変換が、電気回路の

問題を解く場合において有効な手段として必要になります。

また回路は微積分方程式ではなく、フーリエ変換やラプラス変換で直接表現する方が簡単に回路方程式を求めることが出来ます。

7.1.1　フーリエ変換による表現

抵抗・容量・コイルの時間に関する電圧電流関係式は、次のように与えられます。

$$V = RI \tag{7.1}$$

$$I = \frac{d(CV)}{dt} \tag{7.2}$$

$$V = \frac{dLI}{dtt} \tag{7.3}$$

7.1.2　ラプラス変換による表現

第 8 章

ディジタルの数学

アナログ信号を取集時に時間空間だけでは無く周波数空間を考えると、時間空間では扱うことが難しかった色々なことが簡単に扱えるようになりました。このように周波数空間においてディジタルの世界も扱えるようにしたいというのが Z 変換と呼ばれ開発されました。

8.1　デルタ関数 δ について

ディジタルの数学を説明する前に重要なデルタ関数 δ[*1]について述べておきます。

デルタ関数は超関数とも呼ばれる数の一種で、次のような性質を持っています。証明などについては参考文献 [6] を御覧下さい。

8.1.1　デルタ関数の定理

デルタ関数には様々な定理が存在しますが、数学書ではないのでここでは証明は先程述べました参考文献にまかせ結果だけを述べておきます。

定理を述べる前にデルタ関数は幅がゼロで、高さが 1 であり、面積も 1 の

[*1] ディラックのデルタ関数とも言われます。

関数となる特殊な関数です。次にこの関数の色々な定理について述べていきます。

ステップ関数の微分　高さが 1 その後この値が続き、直角に立ち上がる関数をステップ関数 $U(t)$ と呼んでいます。この関数との間には、次の関係があります。

$$\delta(t) = \frac{dU(t)}{dt} \tag{8.1}$$

面積は 1　デルタ関数は次の式を満足します。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{8.2}$$

デルタ関数は偶関数　次の式が成り立ちます。

$$\delta(-t) = \delta(t) \tag{8.3}$$

ある関数とデルタ関数の席による積分　ここで t_0 は正の任意の値とします。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \tag{8.4}$$

デルタ関数の微分は奇関数　次の式が成立します。

$$\delta[-(t-t_0)] = -\delta(t-t_0) \tag{8.5}$$

ある関数と微分デルタ関数の積の積分　この式の中で δ の微分が奇関数であることを使っています。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{d\delta(t_0-t)}{dt} = -\left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=t_0} \tag{8.6}$$

このように δ 関数は、我々月状扱っている関数とはかなり性質が異なります。しかしこの δ 関数の声質を使うことによって複雑な問題も簡単に解くことが出来るようになります。

8.2　アナログ信号からディジタル信号への近似

例えばコイル 1 $[H]$ と抵抗 2 $[\Omega]$ とが電圧源 1 $[V]$ に直列に接続されている場合を考えます。この場合次の式が成立します。

$$\frac{di(t)}{dt}+2i(t)=1$$

この式をときますと、次の式が得られます。

$$i(t)=\frac{1}{2}\left(1-\exp(-2t)\right)$$

この中の指数関数を $T \ll 1$ の小さな時間として $t=nT$ として T に関してテーラー展開（正確にはマクローリン展開）し第 1 項だけで書きますと、次の式が得られます。

$$i(t)\cong\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{1+2T}\right)^{n}\right]$$

この式と先ほど求めた正確な式のグラフと、次のグラフに示しておきます。

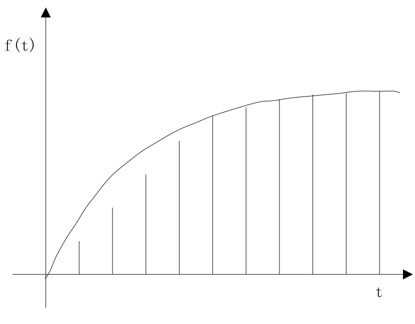


図 8.1　近似によるディジタル化

グラフから分かりますように、最初の立ち上がり部分と時間間隔 T の大きさによって誤差が生じます。これはテーラー展開の第一近似しか使ってい

ないのでその分誤差となって現れます。これではディジタル化による完全な表現ができませんので、何か別の方法を考える必要があります。

8.3　定義から各種定理へ

アナログ信号を等間隔の時間で飛び飛びの値を抽出するとします。その感覚時間 T として n 個目の信号のように番号付けします。ただし $n=0$ は時間ゼロとなるように決めます。これにより信号 $f(x)$ の n 番目の信号は時間周期 T を省略して、$f(n)$ と表されることになります。その結果飛び飛びの信号は時間ゼロを含むと、次のように表現できます。

$$f(0)+f(T)+f(2T)+f(3T)+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \tag{8.7}$$

このままでは数学的な計算などは出来ませんので、次のようなラプラス変換からいわゆる z 変換と呼ばれる変換を考えていきます。

8.3.1　ラプラス変換から Z 変換へ

まず片側ラプラス変換は、次の式で定義されています。

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{\infty} f(t)\exp(-st)dt$$

ここで **(??)** 式を次のように書き直します。四季を書き直す際にディラックのデルタ関数 δt を使います。デルタ関数というのは幅がゼロである、超関数と言われている関数です。この関数を用いると上の式の $f(t)$ に **(??)** 式を使うと上の片側ラプラス変換は、次のようになります。

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\sum_{n=0}^{\infty} f(t)\delta(t-nT) &= \int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f(t)\delta(t-nT)\exp(-st)dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\exp(-snT)\end{aligned}$$

ここで

$$z = \exp sT \tag{8.8}$$

と置きますと 8.10 式は、次のようになります。

$$\mathscr{Z}[f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} \tag{8.9}$$

この式の中で $\mathscr{L}$ の代わりに $\mathscr{Z}$ を用いていることと、関数 f の変数として時間 T を省略していることに注意して下さい。ここで $z = \exp(sT)$ と定義していますが s は複素平面全体の任意の点ですので、z も複素平面全体の点を示すことになります。そこで上の式を z で書きそれを Fn と書きますと、次のように書き換えられます。この式を見て分かることは時間間隔 T が省略されているだけで、複素空間が別のふくす空間に変換されているだけで、ラプラス変換の性質自体はそのまま引き継がれていることになります。

$$Fn = \sum_{0}^{\infty} f(n) z^{-n} \tag{8.10}$$

n は整数の範囲で任意の値を取ることが出来ます。例えば $n-1$ その他適当なマイナスの値を取ることが出来ます。そうすると定義式は正の時間から出発しているのに、マイナス時間も許されるのかという疑問が生じます。これは別にマイナスの時間を許しているのでは無く、自体はその以前から始まって回路の中でメモリなど過去蓄積された現象を扱うために必要となるため、まるでマイナス時間を扱っているかのように思えるだけで、全ての現象に記憶という要素が入ると過去の記憶がどのように将来現れるかということを扱うためには必要なことなのです。

例えば $F(n-1)$ は、次のように決められています。

$$\begin{aligned} F(n-1) &= f(-1) + f(0)z^{-1} + f(1)z^{-2} + f(2)z^{-3} + \cdots \\ &= f(-1) + z^{-1}[f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \cdots] \\ &= f(-1) + z^{-1}F(n) \end{aligned} \tag{8.11}$$

この式から $f(-1)$ の項が生じることになります。これは $t=(-1)T$ 時間前の信号ですので、過去の信号が現在の信号に影響を与えていることになります。これはディジタル信号の場合先程述べましたように記憶を持っていることがあるので、過去の現象を表現する必要があるからです。$f(n-m)$ の場合は、次のように与えられています。

$$Fn-m = z^{-m}F(n) + \left[z^{-m+1}f(-1) + z^{-m+2}f(-2) + \cdots + f(-m)\right] \tag{8.12}$$

この式で注意しないといけないのは、$t=0$ より前では z^{-1} の係数の付け方が異なることです。またこのように過去 $t=mT$ 時間前までの記憶が現在に使われることになります。

8.3.2　逆ラプラス変換から逆 Z 変換へ

逆ラプラス変換は、次のように定義されています。

$$\mathscr{L}^{-1}F(s) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)\exp(st)ds$$

ここで z は、複素数です。x は、信号を表現している連続関数ですが、$x(n)$ は、$t=n$ のところでの x の値を示しています。このことから $x(n)$ は、$t=n$ のところでの離散値の列を示していることになります。

フーリエ変換の場合と同様に、(8.10) 式は、両側 Z 変換と呼ばれます。この式に対応して、次のように定義される変換のことを、片側 Z 変換と呼んでいます。

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \tag{8.13}$$

また逆 z 変換は、次の式として定義されています。

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz \tag{8.14}$$

ただし積分領域は、原点を囲む線です。

8.3.3　フーリエ変換との関係

Z 変換は、フーリエ変換と密接に関係しています。複素数 z を、次のように極座標で表現してみます。

$$z = re^{j\omega} \tag{8.15}$$

この様に置きますと、(8.10) 式は、次のように変形することが出来ます。

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left[re^{j\omega} \right]^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x(n) r^{-n} \right] e^{-j\omega n} \end{aligned} \tag{8.16}$$

この最後の式を見ますと、フーリエ変換そのものであることが分かります。特に $r = 1$ としますと、フーリエ変換となりますので、Z 変換はフーリエ変換の拡張となっていることが分かります。

第 9 章

問題

9.1　問題 1

次の関数の正の最小周期 T を求めなさい。

1. $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\cos \pi x$, $\sin \pi x$, $\cos 2\pi x$, $\sin 2\pi x$
2. $\cos nx$, $\sin nx$, $\cos \frac{2\pi x}{k}$. $\sin \frac{2\pi x}{k}$, $\cos \frac{2\pi nx}{k}$, $\sin \frac{2\pi nx}{k}$
3. T が $f(t)$ の周期であるとき、nT $(n = 2\ ,\ 2\ ,\ \cdots)$ も $f(t)$ の周期であることを示せ。
4. $f(t)$ と $g(t)$ が周期 T をもつとき、$h = af + bg(a$, b は定数) も周期 T を持つことを示せ。
5. T を任意の正数とすると、関数 $f(x) =$ 一定は周期 T の周期関数であることを証明せよ。
6. $f(x)$ が x の周期関数で、周期を T とする。$f(ax)$ $(a \neq 0)$ が周期 T/a の x の周期関数であることを示せ。また $f(x/b)$ $(b \neq 0)$ が周期 bT の x の周期関数であることを示せ。

9.2　問題２

9.2.1　問題２－１

関数 $f(x)$ が次に示すように与えられているとき、各々のフーリエ係数を求めなさい。ただし関数 $f(x)$ は周期 2π であるとします。

1.
$$f(x) = \left[\begin{array}{ll} 0 & (-\pi < x < -\pi/2 \;\; and \;\; \pi/2 < x < \pi) \\ 1 & (-\pi/2 < x < \pi/2) \end{array} \right.$$

2.
$$f(x) = \left[\begin{array}{ll} 0 & (-\pi < x < 0 \;\; and \;\; \pi/2 < x < \pi) \\ 1 & (0 < x < \pi) \end{array} \right.$$

3.
$$f(x) = \left[\begin{array}{cl} 1 & (-\pi/2 < x < \pi/2) \\ -1 & (\pi/2 < x < 3\pi/2) \end{array} \right.$$

4.
$$f(x) = x \qquad\qquad (-\pi < x < \pi)$$

5.
$$f(x) = x^2 \qquad\qquad (-\pi < x < \pi)$$

9.2.2　問題２－２

次の関数のフーリエ級数を求めなさい。

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & (-2 < t < -1) \\ k & (-1 < t < 1) \\ 0 & (1 < t < 2) \end{array} \right. \qquad T = 4$$

9.2.3　問題２－３

正弦波電圧 $E\sin\omega t$ が半波整流器を通ると、波の負の部分が除去されるとします。得られる周期関数のフーリエ級数を求めなさい。

$$f(t)=\begin{cases} 0 & (-T/2<0) \\ E\sin\omega t & (1<t<T/2) \end{cases} \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}$$

9.2.4　問題２－４

次の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数を求めなさい。

1. $$f(t)=\begin{cases} -1 & (-1<t<0) \\ 1 & (0<t<1) \end{cases} \qquad T=2$$

2. $$f(t)=\begin{cases} 0 & (-2<t<0) \\ 1 & (0<t<2) \end{cases} \qquad T=3$$

3. $$f(t)=\begin{cases} 0 & (-1<t<0) \\ t & (0<t<1) \end{cases} \qquad T=2$$

4. $$f(t)=\left\{ 1-t^2 \quad (-1<t<1) \right. \qquad T=2$$

5. $$f(t)=\begin{cases} -1 & (-1<t<0) \\ 2t & (0<t<1) \end{cases} \qquad T=2$$

9.2.5　問題２－５

次の方形パルスのフーリエ級数を求めなさい。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi < x < 0) \\ 2k & (0 < x < \pi) \end{cases} \qquad T = 2\pi$$

9.2.6　問題２－６

次の鋸歯状波のフーリエ級数を求めよ。 ただし関数は 2π の周期関数であるとします。

$$f(x) = x + \pi \qquad (-\pi < x < \pi)$$

9.2.7　問題２－７

次の関数は、奇関数かあるいは偶関数か、それとも奇関数でも偶関数でもないか述べなさい。

$$\begin{array}{cccc} e^x & e^{x^2} & \sin nx & x\sin x \\ \cos x/x & \ln x & \sin x^2 & \sin^2 x \\ |x| & x\cos nx & \sin x + \cos x & c(= constant) \end{array}$$

$\ln(1+e^x) - x/2$

9.2.8　問題２－８

次の関数を奇関数と偶満数の和で表しなさい。

1. $1/(1-x)$
2. $1/(1-x)^2$
3. e^x
4. $x/(x+1)$

9.2.9　問題２－９

次のことを証明しなさい。

1. 偶関数の和と積は、偶関数である。
2. 奇関数の和は、奇関数である。奇関数と奇関数の積は、偶関数であり、偶関数と奇関数の積は、奇関数である。
3. $f(x)$ が奇関数のとき、$|f(x)|$ と $f^2(x)$ は偶関数である。
4. $f(x)$ が偶関数のとき、$|f(x)|$ と $f^2(x)$, $f^3(x)$ は偶関数である。
5. 恒等式

$$\sin^3 x = (3/4)\sin x - (1/4)\sin 3x$$
$$\cos^3 = (3/4)\cos x + (1/4)\cos 3x$$

をフーリエ級数を用いて証明せよ。

9.2.10　問題２－１０

奇関数の複素フーリエ係数は、純虚数である ことを証明しなさい。

9.2.11　問題２－１１

偶関数の複素フーリエ係数は、実数である ことを証明しなさい。

9.2.12　問題２－１２

1. 次の関数は周期 2π の周期関数である。これらのフーリエ級数の複素形式を求めよ。その結果から対応する実フーリエ級数を求めて比較せよ。

$$f(x) = \quad x \quad (-\pi < x < \pi)$$

2.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 < x < \pi) \end{cases}$$

3. 次の関数の複素フーリエ係数を求めよ。

$$f(x) = \ e^{x} \quad (-\pi < x < \pi)\ ,\ f(x+2\pi) = f(x)$$

9.3　問題３

9.3.1　問題３－１

次に示す高さ 1 の単一パルスのフーリエ積分表示を求めなさい。

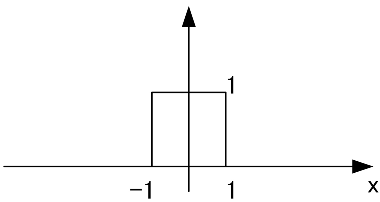


図 9.1　問題 3.1

9.3.2　問題３－２

次の関数を考える。

$$f(x) = e^{-kx} \quad (x > 0)$$

この関数が $f(-x) = f(x)$, $k > 0$ を満足するとき、関数のフーリエ積分を求めよ。

9.3.3　問題３－３

次の式を証明せよ。

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x\omega + \omega \sin x\omega}{1+\omega^2} d\omega = \begin{cases} 0 & (x<0) \\ \pi/2 & (x=0) \\ \pi e^{-x} & (x>0) \end{cases}$$

9.3.4　問題３－４

$f(x)$ が偶関数のとき、次の関数をフーリエ積分で表しなさい。

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

9.3.5　問題３－５

$f(x)$ が偶関数で $x>0$ のとき次の条件を満たすとします。関数をフーリエ積分で表しなさい。

$$f(x) = e^{-x} + e^{-2x}$$

9.4　問題４

9.4.1　問題４－１

あるパルスのフーリエ変換が、次のように与えられるとき

$$F(\omega) = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad (|\omega| \leq 0.5\omega_0)$$
$$F(\omega) = 0 \qquad (|\omega| \geq 0.5\omega_0)$$

次の問いに答えなさい。

1. 対応する時間関数を求めよ。
2. このパルスを時間間隔 $2\pi/\omega_0$ で配置したパルス列は、正確にもとの信号を再現できることを示せ。

9.4.2　問題４－２

振幅が 1 $[V]$、幅が 1 $[\mu s]$ の方形波のスペクトルを求めなさい。またスペクトルを図示し、最初にゼロとなる周波数を求めなさい。

9.4.3　問題４－３

信号 $f(t) = 4(\sin 800\pi t + \sin 1600\pi t)$ を 2 $[kHz]$ で標本化する。標本化信号のスペクトル、およびナイキスト速度を求めなさい。また標本化信号を理想フィルタに加えるとき、信号を再生させるために必要な遮断周波数を求めなさい。

付録 A

問題の解答

ここでは掲載しておいた問題の解答を載せておきます。

A.1　問題 1 の解答

1. 2π , 2π , π , π , 2 , 2 , 1 , 1
2. $2\pi/n$, $2\pi/n$, k , k , k/n , k/n
3. 帰納法を用いて証明する。

   $n-1$ のとき結果が正しいとすると、次のような式が得られる。

   $$f\left[(n-1)T+t\right]=f(t) \tag{A.1}$$

   そのとき A.1 式を用いて

   $$\begin{aligned} f(nT+t)6 =& f\left[(n-1)T+t+T\right] \\ =& f\left[(n-1)T+\tau\right] \\ =& f(\tau) \end{aligned} \tag{A.2}$$

   ここで $t+T=\tau$ と置いた。
4. 2 つの関数が共に同じ周期を持つ関数であるので、次のような式が成

立する。

$$f(T+t) = f(t) \tag{A.3}$$
$$g(T+t) = g(t) \tag{A.4}$$

これら 2 つの式を用いると、次の様に計算できるので、証明できたことになる。

$$\begin{aligned} h(T+t) &= af(T+t) + bg(T+t) \\ &= af(t) + bg(t) \\ &= h(T+t) \end{aligned}$$

5. 関数 $f(x)$ は x の値がどのようなものであっても一定の値を取るので、周期分だけ変化しても一定値は変わらない。よって証明できたことになる。
6. 関数 $f(x)$ は周期 T を持つので

$$f(T+x) = f(x) \tag{A.5}$$

でなければならない。y と言う変数に置き換えた式も (A.5) 式を満足しなければならない。ここで $y = ax$ と置くと y と言う変数に置き換えた (A.5) 式は、次の様になる。

$$\begin{aligned} f(T+ax) &= f(ax) \\ &= f\left[(T/a + x)a\right] \end{aligned} \tag{A.6}$$

と言う関係式が得られるので、周期が T/a であることが判る。
$f(x/b)$ の場合も同様にして証明することが出来る。

A.2　問題 2 の解答

問題２－１の解答

1.

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x-\ \cdots\right) \tag{A.7}$$

2.

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\ \cdots\right) \tag{A.8}$$

3.

$$\frac{4}{\pi}\left(\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x-\ \cdots\right) \tag{A.9}$$

4.

$$2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\ \cdots\right) \tag{A.10}$$

5.

$$\frac{\pi\,2}{3}-4\left(\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{9}\cos 3x-\frac{1}{16}\cos 4x+\ \cdots\right) \tag{A.11}$$

問題２－２の解答 (2.8) 式 , (2.9) 式から

$$a_0=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}f(t)dt frac14\int_{-1}^{1}kdt=\frac{k}{2} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(t)\cos\frac{n\pi}{2}tdt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}k\cos\frac{n\pi}{2}tdt \\ &= \frac{2k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} \end{aligned} \tag{A.13}$$

となるが、n が偶数のときは $a_n=0$ となり

$$a_n=\frac{2k}{n\pi} \qquad (n=1\ ,\ 5\ ,\ 9\ ,\ \cdots)$$

$$a_n=-\frac{2k}{n\pi} \qquad (n=3\ ,\ 7\ ,\ 11\ ,\ \cdots)$$

また (2.10) 式から $b_n=0$ となるので、次のような結果が得られる。

$$f(t)=\frac{k}{2}+\frac{2k}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}t-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}t+\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}t-\ \cdots\right) \tag{A.14}$$

問題２－３の解答 (2.8) 式 ∼(2.10) 式から

$$a_0 = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega} E\sin\omega t = \frac{E}{\pi} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} E\sin\omega t\cos n\omega t dt \\ &= \frac{E}{2\pi}\left(\frac{2}{1+n}+\frac{2}{1-n}\right) = -\frac{2E}{(n-1)(n+1)\pi} \end{aligned} \tag{A.16}$$

$$b_n = b_1 = \frac{E}{2} \tag{A.17}$$

以上から次の結果が得られる。

$$f(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2}\sin\omega t - \frac{2E}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t + \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t + \cdots\right) \tag{A.18}$$

問題２－４の解答

1.

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin\pi t + \frac{1}{3}\sin 3\pi t + \frac{1}{5}\sin 5\pi t + \cdots\right) \tag{A.19}$$

2.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi t}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi t}{2} + \cdots\right) \tag{A.20}$$

3.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\left(\cos\pi t + \frac{1}{9}\cos 3\pi t + \cdots\right) \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\left(\sin\pi t - \frac{1}{2}\sin 2\pi t + \cdots\right) \end{aligned} \tag{A.21}$$

4.

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi t - \frac{1}{4}\cos 2\pi t + \frac{1}{9}\cos 3\pi t - \cdots\right) \tag{A.22}$$

5.

$$-\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi t + \frac{1}{9}\cos 3\pi t + \cdots\right) + \frac{2}{\pi}\left(2\sin\pi t - \frac{1}{2}\sin 2\pi t + \cdots\right) \tag{A.23}$$

問題２－５の解答関数の形を調べると、この関数は奇関数であるので、奇関数の式を用いて

$$k+\frac{4k}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\right) \tag{A.24}$$

問題２－６の解答この関数は、奇関数と定数の和と考えることが出来るので

$$\pi+2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots\right) \tag{A.25}$$

問題２－７の解答

1. 偶でも奇でもない 、 偶 、 奇 、 偶
   奇 、 偶でも奇でもない 、 偶 、 偶
   偶 、 奇 、 偶でも奇でもない 、 偶
   偶でも奇でもない

問題２－８の解答 (2.14) 式と (2.15) 式を用いさえすれば良い。

1.

$$f_o=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{2x}{1-x^2} \tag{A.26}$$

$$f_e=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)=\frac{2}{1-x^2} \tag{A.27}$$

2.

$$f_o=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1+x)^2}\right]=\frac{4x}{(1-x^2)^2} \tag{A.28}$$

$$f_e=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}\right]=\frac{4x}{(1-x^2)^2} \tag{A.29}$$

3.

$$f_o=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)=\sinh x \tag{A.30}$$

$$f_e=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)=\cosh x \tag{A.31}$$

4.

$$f_o = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+1} - \frac{-x}{-x+1}\right) = \frac{2x}{1-x^2} \tag{A.32}$$

$$f_e = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+1} + \frac{-x}{-x+1}\right) = \frac{-2x^2}{1-x^2} \tag{A.33}$$

問題２－９の解答

1. ２つの偶関数の和と積は、$f_{1e}+f_{2e}$, $f_{1e}\cdot f_{2e}$ の様に表されるので、を代入しても符号の変化は無いことが判る。
2. この場合も同様に二つの奇関数の和、二つの奇関数の積、奇関数と偶関数の積を考えることによって、簡単に証明できる。(省略)
3. $x=-x$ を二つの関数に代入することによってマイナスが無くなることにより証明できる (省略)
4. 上と同様。
5. 奇関数、遇関数であることを利用して、各々のフーリエ係数を求めると証明できる。

問題２－１０の解答 (2.31) 式から、関数 $f(x)$ を偶関数 $f_e(x)$ と奇関数 $f_o(x)$ とを用いて

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_e+f_o}{2}e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_e+f_o}{2}(\cos x - i\sin x)dx \\
&= \frac{1}{4}\int(f_e\cos x - if_e\sin x + f_o\cos x - if_o\sin x)dx
\end{aligned} \tag{A.34}$$

この式を見ると、関数 $f(x)$ が奇関数の場合には、括弧の中の第 1 項は存在しない。また第 3 項は、積分することによって無くなる。

問題２－１１の解答偶関数の場合は、(A.34) 式を用いて、括弧の中の第 2 項は積分することによりゼロとなり、第 3 ,＝4 項は存在していないので実数となることが分かる。

問題２－１２の解答

1. (2.31) 式から、

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[x\frac{1}{-in}e^{-inx}\|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}dx\right] \\
&= i\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}
\end{aligned}
\tag{A.35}
$$

実フーリエ係数は、関数 $f(x)$ が奇関数であるので、(2.3) 式より

$$
a_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}
\tag{A.36}
$$

これら 2 つの式から、複素係数の実数部を取ることによって実フーリエ係数が求められることが判る。

2.

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(-e^{-inx}\right) + \int_{0}^{\pi} e^{-inx}dx\right] \\
&= \frac{2-2i\sin n\pi}{in}
\end{aligned}
\tag{A.37}
$$

この場合も、複素係数の実数部を取ることによって実フーリエ係数が求められる。

3.

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1+in)x}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{(1+in)\pi} - e^{-(1+in)\pi}}{1+in} \\
&= \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{1+in}{1+n^2}
\end{aligned}
\tag{A.38}
$$

A.3　問題３の解答

問題３－１の解答関数の形を見ると偶関数であるので (3.15) 式を用

いることが出来て

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx \\
&= \int_{-1}^{1} \cos\omega x dx \\
&= \frac{2\sin\omega}{\omega}
\end{aligned}
\tag{A.39}
$$

この結果から

$$
f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\cos\omega x \sin\omega}{\omega} d\omega \tag{A.40}
$$

問題３－２の解答まず始めに、次の関係式が成立する。

$$
2\int e^{-kx}\cos\omega x dx = -\frac{k}{k^2+\omega^2}e^{-kx}\left(-\frac{\omega}{k}\sin\omega x + \cos\omega x\right)
$$

偶関数であるので、偶関数に対するフーリエ積分の (EqIntegral-12) 式から

$$
A(\omega) = \frac{2k}{k^2+\omega^2} \tag{A.41}
$$

この式と (EqIntegral-13) 式から

$$
\int_{0}^{\infty} \frac{\cos\omega x}{k^2+\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2k}e^{-kx} \tag{A.42}
$$

同様にして $f(-x) = -f(x)$ の場合には、次のような結果が得られる。

$$
\int_{0}^{\infty} \frac{\omega\sin\omega x}{k^2+\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2}e^{-kx} \tag{A.43}
$$

問題３－３の解答この問題は、(A.42) 式 (A.43) 式を用いることによって得られる。式の左辺は、(A.42) 式 (A.43) 式において $k=1$ とした場合の和によって与えられる。$x<0$ のとき (A.42) 式は $f(x)$(A.43) 式は $-f(x)$ となるので、このとき加え合わせるとゼロになる。

$x=0$ の場合は、$k=1$ とし、$x\to 0$ とすれば得られる。

$x>0$ の場合は、(A.42) 式 (A.43) 式において $k=1$ とした場合の和によって与えられる。

問題３－４の解答

$$2\left(1-\frac{2}{\omega^2}\right)\sin\omega+2\frac{2}{\omega}\cos\omega$$

問題３－５の解答

$$\frac{3(2+\omega^2)}{4+5\omega^2+\omega^4}$$

A.4　問題４の解答

問題４－１

1.

$$f(t) = \frac{\sin(\omega_0 t/2)}{\omega_0 t/2}$$

2. $2\pi/\omega_0$ の間隔で波形がゼロ交差するため、標本点でのパルス関干渉は無い。

問題４－２

1. 1 $[MHz]$
2. 0.2 $[V_{P-P}]$
3. 10 $[\mu s]$

問題４－３

1. 1.6 $[kHz]$
2. 1 $[kHz]$

付録 B

フーリエ

B.1　フーリエ級数

代表的な関数のフーリエ級数を載せておきます。

周期 2π の方形波

$$f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ +k & 0 < x < \pi \end{cases} \tag{B.1}$$

$$F(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right) \tag{B.2}$$

任意周期の方形波

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -2 < x < -1 \\ k & -1 < x < +1 \text{ のとき } T = 4 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases} \tag{B.3}$$

$$F(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}x + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}x - \cdots\right) \tag{B.4}$$

三角波

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{l}x & 0 < x < \frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l}(l - x) & \frac{l}{2} < x < l \end{cases} \tag{B.5}$$

$$F(x) = \frac{8k}{\pi^2}\left(\frac{1}{l^2}\sin\frac{\pi}{l}x - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{l}x + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi}{l}x + \cdots\right) \tag{B.6}$$

B.2　フーリエ変換

代表的な関数に対するフーリエ変換表です。

元の関数	フーリエ変換	元の関数	フーリエ変換
$\begin{cases} 1 \ \lvert x\rvert < a \\ 0 \ \lvert x\rvert > a \end{cases}$	$\frac{2\sin a\omega}{\omega}$	$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{\pi\exp - a\omega}{a}$
$\frac{x}{x^2+a^2}$	$-\frac{j\pi\omega}{a}\exp(-a\omega)$	$f^n(x)$	$j^n\omega^n F(\omega)$
$x^n f(x)$	$j^n \frac{d^n F(\omega)}{d^n\omega}$	$f(ax)\exp^{jbx}$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega - b}{a}\right)$
$\frac{1}{x}$	$\frac{\pi}{2}$	$\exp(-ax)$	$\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$
x^{-n}	$\frac{\pi\omega n - 1 csc(n\pi/2)}{2\Gamma(n)} \quad 0 < n < 2$	$\frac{\sin ax}{x}$	$\frac{1}{2}ln\left(\frac{\omega+a}{\omega-a}\right)$

表 B.1　フーリエ変換表

付録 C

ラプラス変換

ラプラス変換表を、次に示しておきます。

元の関数	ラプラス変換	元の関数	ラプラス変換
$U(x)$	$\frac{1}{s}$	a	$\frac{a}{s}$
$\delta(x)$	1	x	$\frac{1}{s^2}$
x^n	$\frac{n!}{s^{n-1}}$	e^{-ax}	$\frac{1}{s+a}$
$x^n e^{-ax}$	$\frac{n!}{(s+a)^n}$	$\sin(\omega x)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega x)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sinh(\omega x)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$\cosh(\omega x)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$		

表 C.1　ラプラス変換表

参考文献

[1] スミルノフ、”高等数学教程　第４巻”、共立出版格式会社、1957.

[2] Murray R.Spiegel、”数学公式・数表ハンドブック”、オーム社、1968.

[3] J.J. ベネディト、M.W. フレージャー　編、”ウエーブレット　理論と応用”、スプリンガー、1994.

[4] チャールズ K チュウイ”ウェーブレット入門”、東京電機大学出版局、1993.

[5] チャールズ K チュウイ” ウェーブレット応用”、東京電機大学出版局、1997.

[6] Athanssions Popoulis, The Fourie Integral and its Applications, McGraw-Hill,New York,1970.

[7] Athanssions Popoulis, Circuit and Systems, CBS 出版,1980.

新原　盛太郎（しんばら　せいたろう）

1948 年 8 月　山口県徳山市に生まれる（本籍：福岡県博多区）

1972 年 3 月　九州大学工学部卒業

1972 年 4 月　東京大学 青木研究室

1973 年 4 月　東京芝浦電気入社

1989 年 10 月　CADENCE(USA) 社に 1 年間駐在

2008 年 4 月　東京工業大学　非常勤講師

2008 年 8 月　株式会社東芝退社

2020 年 3 月　東京工芸大学　非常勤講師退官

[特許]

USA:5 件、EU: 2 件、韓国: 1 件、国内：56 件

[著作]

ダイオード・トランジスタ/FET 活用入門　CQ 出版

Spice とデバイス・モデル　CQ 出版

間違いが多い電気知識　東京図書出版

電気回路基礎　Amazon より電子書籍