

目次

第 1 章	はじめに	1
1.1	回路設計の歴史	3
1.2	新回路の誕生	5
第 2 章	計測の基礎	11
2.1	様々な測定器	11
2.2	有効数字	17
第 3 章	ダイオード	19
3.1	大信号と小信号	19
3.2	ダイオードの種類	20
3.3	ダイオード等価回路	22
3.4	ダイオード・パラメータの測定	24
第 4 章	トランジスタ	27
4.1	トランジスタの種類	27
4.2	トランジスタの等価回路	29
4.3	簡略化した BJT 等価回路	29
4.4	MOS における簡略化モデル	36
4.5	簡略化モデルの公式	40

第 5 章	増幅器	45
5.1	デシベル (dB)	46
5.2	利得	48
5.3	雑音	49
5.4	歪の分類と定義	55
5.5	Intermodulation	59
5.6	パルス信号の歪	64
第 6 章	帰還増幅器	67
6.1	帰還の基礎	67
6.2	伝達特性	71
6.3	帰還回路インピーダンス	77
6.4	ループ利得の測定	79
6.5	ナイキスト判定法とボード線図	83
第 7 章	演算増幅器	87
7.1	理想演算増幅器	87
7.2	演算増幅器の特徴	88
7.3	加算器	90
7.4	積分器	91
7.5	微分器	92
第 8 章	発振器	95
8.1	発振の条件	97
8.2	発振の安定性	103
8.3	発振器の雑音	106
8.4	発振器の種類	108
第 9 章	変復調器	113
9.1	変復調方式	113

9.2	振幅 (AM) 変調器	119
9.3	周波数 (FM) 変調器	123
9.4	振幅 (AM) 復調器	126
9.5	周波数 (FM) 復調器	128
付録 A	素子の規格	135
A.1	公称値に対する規定	135
A.2	抵抗の規格	137
A.3	容量の材料による違い	138
A.4	コイルの規格	138
付録 B	数について	139
B.1	数の表現	139
B.2	よく用いられる数値	141
B.3	数学定数	142
付録 C	周波数の分類と物理定数	143
C.1	信号の分類と名称	143
C.2	物性に関する定数	144
付録 D	数学公式集	147
D.1	微分・積分	147
D.2	ベクトル解析	150
D.3	行列式	153
D.4	三角関数	155
D.5	複素関数	156
D.6	双曲線関数	160
D.7	フーリエ解析	162
D.8	ラプラス変換	164

付録 E	確率	167
E.1	確率	167
付録 F	確立過程	177
F.1	確率過程の定理	183
参考文献		187
索引		189

目次

2.1	ガルバノ・メータ (1)	12
2.2	ガルバノ・メータ (2)	12
2.3	ブリッジ回路	14
2.4	Wheatstone bridge	15
2.5	Wien bridge	16
2.6	Maxwell bridge	17
3.1	ダイオードの大信号特性	22
3.2	ダイオードの小信号用等価回路	23
4.1	トランジスタ等価回路の歴史	29
4.2	簡略化モデル	30
4.3	ハイブリッド π モデル	31
4.4	低周波用簡易等価回路	33
4.5	高周波用簡易等価回路	33
4.6	飽和特性	35
4.7	カットオフ領域の簡易等価回路	36
4.8	簡略化 MOS モデル	37
4.9	カットオフ領域におけるモデル	39
5.1	熱雑音を計算するための図	52

5.2	現実の2次、3次高調波	58
5.3	歪の周波数スペクトラム	59
5.4	<i>IMFDR</i> ₃	61
5.5	パルス応答	64
6.1	帰還ブロック	68
6.2	帰還回路への雑音の影響	70
6.3	Blackman 公式の説明	72
6.4	各種帰還回路ブロック	76
6.5	近似等価回路	77
6.6	帰還回路の表現	80
6.7	利得を求めるための図	80
6.8	電流源の場合	81
6.9	帰還ブロック	83
6.10	増幅器のボード線図	84
6.11	ナイキスト線図	85
7.1	演算増幅器ブロック図	88
7.2	抵抗付加による演算増幅器	89
7.3	加算器	91
7.4	積分器	92
7.5	微分器	92
8.1	コルピッツ発振器	98
8.2	簡略化等価回路による表現	99
8.3	発振回路の組み合わせ	102
8.4	安定性の説明図	103
8.5	雑音の漸近図	107
8.6	各種発振器	109
8.7	移相発振回路	110

8.8	移相器	110
8.9	水晶の等価回路	111
9.1	振幅変調信号	116
9.2	振幅変調信号のスペクトラム	116
9.3	Cowan 変調器	121
9.4	Ring 変調器	121
9.5	平行変調器	121
9.6	振幅変調器	122
9.7	位相を位相を 90 [度] ずらす変調器	123
9.8	リアクタンス管	124
9.9	Armstrong 変調器	124
9.10	ブリッジ回路による位相変調	125
9.11	同期検波回路	127
9.12	同調回路特性	129
9.13	F M 復調回路	129
9.14	周波数特性	130
9.15	Foster-Seeley 回路	130
9.16	位相の変位	131
9.17	Seeley-Avins 回路	132
9.18	パルスカウント方式	133
9.19	位相変化を利用した復調器	134
A.1	抵抗の色表示	137

表目次

3.1	ダイオードの名称	21
4.1	トランジスタの名称	28
5.1	2, 3次 harmonic、intermodulation	60
6.1	帰還回路	76
A.1	E標準数の系列	135
A.2	3数字法	136
A.3	許容差を表す記号	136
A.4	色による表現	136
A.5	抵抗器の色表示	137
A.6	容量の種類	138
B.1	SI単位	140
B.2	英米語の数詞	140
B.3	Latex 数字	141
B.4	平方根	141
B.5	常用対数	141
B.6	自然対数	142

C.1	周波数の分類	144
C.2	物理定数表	144
C.3	シリコン中の拡散係数	145

第 1 章

はじめに

アナログ回路設計法としては文献 [19] の Chirlan のようなあるいは大学で行われているあるいは市販されている本で紹介されている設計法は、トランジスタの電流や電圧の関係式などを組み合わせた結構複雑な設計法です。しかもシミュレーションを中心にした回路設計法です。しかし現在企業の設計部門でそのような複雑な設計法は行われていません。現実の企業における設計法はこれから説明する簡略化モデルを用いた設計法です。より詳しくは参考文献 [5] を参照下さい。昔の設計法が行われないのは、次のような様々な理由からです。

1. 設計に多大の時間が掛かる。
2. 問題点が出て、どこにその原因があるのか分からない。
3. シミュレーションでは膨大な計算と時間が必要となる。
4. 回路変更によって再度膨大な計算と時間が掛かる。
5. 回路全体の動作を理解出来ない。

これらの問題点を解消するのが、現在回路設計で用いられている簡略化モデル [2] [5] を用いた、電卓、紙と鉛筆のみによる回路設計を正確にしかも短時間でを行うための必須の知識です。

この著書では設計の手法自体は参考文献 [5] [6] に記述している簡略モデ

ルの紹介と設計に必要な理論的説明を中心に述べています。

この著書によってアナログ回路設計に必要な基盤となる注意点を身に付けることが出来、より高度な専門分野へと進むことが出来るようになると思われます。

フィルタについても述べると基本的な回路の問題をすべて説明することができますが、フィルタの理論は主に回路合成の一分野であり、説明するためには膨大なページが必要になりますので、この著書では文献を掲載するに留め、別途別の著書として紹介したいと考えています。

この著書では実際に回路設計を行う方に向けた様々な知識と、それらを実行するために必要な公式や数表などについてまとめています。また電子回路において行われている様々な実験に必要な測定も述べています。この著書によって電気電子回路の設計に関連する様々な知識が揃うと思います。ただ信頼性に関してはこの著書については割愛しています。

この著書では電子回路の具体的設計と実験について述べていますが、AD/DA 変換器、PLL、フィルタなどの大きなテーマについては膨大なページとなるため、それらの専門書をご覧ください。

次の章からの内容を簡単に述べますと、第 2 章は、基本的なパラメータについての測定法と測定方法について述べています。

第 3 章は、ダイオードの基礎方程式と、その中に含まれているパラメータの測定方法について述べています。

第 4 章は、トランジスタの基礎方程式と、その中に含まれているパラメータの測定方法について述べています。特に簡略モデルは回路設計においては必須のモデルですので、詳細な導出方法は参考文献 [5] を御覧いただき、結果だけを簡潔に述べています。

計算機シミュレーションにおいて必要な SPICE で用いられている ガンメル・ブーン・モデルについて、参考文献 [2] を参考にして下さい。第 5 章は、増幅器の基本的な性質について述べ、具体的な解析は参考文献 [5] を御覧いただき、ここでは別の観点から必要な事柄を中心に述べています。

第 6 章は帰還増幅器の基本的な性質と便利な測定方法、特に帰還回路の

解析方法を具体的に紹介しています。

第7章は演算増幅器の基本回路のみを述べていますが、演算増幅器は昔アナログ計算機と言われたように様々な回路が考案されています。それらは本文で紹介した参考文献をご覧ください。

第8章は、発振器の発振するための条件や発振の安定性、非線形回路独特の現象などの基本的な性質について述べています。

第9章は、モデム (Modulation and Demodulation) の基礎理論と2, 3の具体的な回路のついて述べています。ただ変復調機は頻繁に個人で用いられることは少ないため、現在までに知られている主な回路を中心に述べるに留めています。

具体的に回路設計に必要な様々な知識も付録としてまとめております。実際の設計において必要となる各種受動素子の表示方法などの付録の規格A章、数の数え方や重要な数などを述べた付録のB章、周波数分類方法や重要な物理定数表などを述べた付録のC章、それと簡単な数学公式集D章、確率E章、確率過程F章の付録なども述べております。

1.1 回路設計の歴史

電気電子の発展は複雑、多岐にわたっています。その歴史も古く、ここでは年表の形式で回路設計の歴史を中心に主な発明発見について述べています。歴史を知ることによって、理論がより明確に理解できるようになります。

1780年 ガルバーニによる、蛙の筋肉による電気実験。

1800年 ボルタによって、銅と亜鉛を塩水に浸した電池が作られた。

1820年 エールステッドは、電流が近くに置かれた磁針を動かすという現象を発見した。

シュバイガーとボグゲンドルフが、電流計を発明。

アラゴはコイルによって、鉄心が磁化されることを発見。

- ビオとサバルが、電流の磁気作用に関するビオ・サバルの法則を確立。
- 1921年 ゼーベックによる、熱電気現象の発見。(2種の金属からなる回路の2接点に温度差があると電流が流れる)
- 1827年 電気抵抗に関する、オームの法則の発見。ファン・デル・ポールによる、発振器の研究。
- 1938年 ソビエト連邦のベルシュタインによる、自由発振器での雑音理論確立。
- 1831年 ファラデーによる、電磁誘導の発見。
- 1832年 ヘンリーが、コイルの自己誘導についての実験報告をした。
- 1833年 電気分解に関するファラデーの法則の発見。
- 1834年 ファラデーが、自己誘導現象を発見した。
レンツが、「誘導電流は導線がその運動と逆向きに磁気力を受けるような向きに生じる」という、レンツの法則を発表。
- 1840年 電流の熱作用に関する、ジュールの法則。
- 1842年 W. トムソン(ケルビン卿)は、静電気理論と熱伝導理論との間の形式的類似を指摘した
- 1845年 ファラデー効果(磁場の中での偏曲面の回転)や反磁性の発見。
ノイマンが、レンツの法則とオームの法則とを結合させて電磁誘導の数学的法則を作り上げた。
- 1846年 ファラデーは、光が力線の振動ではないかと言った。
- 1847年 W. トムソンは、電磁気理論と弾性体理論の間の対応を示した。
- 1853年 W. トムソンが、ライデン瓶の放電が振動的であることを示しその周期を与えた。
- 1855年 マクスウエルが、「ファラデーの力線について」を発表。
- 1857年 フェッダーセンが、回転鏡を用いて火花放電の写真を撮影し、電気振動を実験的に確かめた。
- 1862年 マクスウエルが、「物理的力線について」を発表。
- 1864年 マクスウエルが、「電磁場の動力的理論」を発表。

1873年 マクスウェルが、「電気磁気理論」を発表。

1884年 ポインティングとヘビサイドは、独立に電磁場におけるエネルギーの流れに関する法則を発見し、ポインティング・ベクトルが導入された。

1888年 ヘルツによる電磁波の発見。

1895年 マルコーニによる無線通信機の発明。

1897年 J. J. トムソンによる電子の確認。

1930年代 PLL 回路が考案された

1947年 ベル研が、点接触型ゲルマニウム・トランジスタを発表

1954年 Tellegen が、ideal amplifier の概念を発表

1958年 J.S.Kilby による集積回路の発明

1964年 Carlin が nullor の概念を発表

1968年 B.Gilbert が、ギルバート回路を発表

1971年 Widlar が、バンド・ギャップ回路を発表

1974年 R.H.Dennard によるスケーリング則の発表

1.2 新回路の誕生

「何が新しい回路を生み出すか」ということは、重要な問題です。このことに関しましては、次のような要因が考えられます。

1.2.1 利益の追求による新回路の発見

回路はプリント基板や IC などの上に構成され、販売されます。勿論趣味で回路を作る人もいるでしょうが、それらは少数に過ぎません。販売を目的とするならば、販売によって得られる利益を向上させる必要があります。その利益を向上させるための方法として、次の項目から示すような新しい回路を用い、低価格を実現する様々な手段が執られています。

チップサイズの縮小

小さい面積に大量の回路を作り込めば、製作するための費用は低下してきます。そのためには、素子の大きさを小さくする必要があります。また小さくすることによって、使うトランジスタの性能が向上するというメリットも生じます。

素子数の減少

同じ動作を行うために、使う素子の数が減ると当然チップサイズは小さくなります。電子回路では、その様なことが可能です。勿論そのためには、今までにない新しい理論が必要になります。その例として、従来電圧を主体に回路を設計していましたが、近年電流を主体に回路を設計するという手法が考案されました。この方法により低電圧でしかも高周波を扱える回路の実現が可能となりました。

素子の縮小

素子を小さくすれば、その分チップサイズが小さく出来ることは、言うまでもありません。しかし素子を縮小すると、良い点と悪い点とが出てきます。良い点としては、素子の高周波特性が向上することです。悪い点としては、耐圧が減少したり、アーリー効果が顕著になったり、リーク（漏れ電流）が増加したりすることです。しかし世界の趨勢として、素子サイズを縮小するという努力は、あらゆる研究機関で行われてきましたし、今後も行われることでしょう。その理由は、素子サイズを縮小することがチップサイズを縮小するために一番効果が大きいことと、大幅な高周波特性の向上が得られるからです。また回路設計側においても、低電圧設計を目指し、新しい回路が考案され続けています。

安い（特性が悪い）材料の使用

このテーマは、信頼性と深く関わりがあります。なぜならば、特性が悪い材料を使うと言うことは、すなわち製品の品質が低下することにつながるからです。小さな変更が日常的に行われていますが、過去のもっとも大きな変更としては、パッケージがセラミックから樹脂に変更されたことでしょう。例えば家庭用電子機器の場合、保証期間*1が決められています。この保証期間を守りさえすればよいわけですから、例えばテレビの場合は8年間部品が故障しなければよいということになります。これくらいの期間であれば、高価なセラミックでなく樹脂で十分です。しかし8年間企業は保証するための部品を保管しておかなくてはなりません。

しかし問題は、信頼性だけに留まりません。樹脂を使うことによって寄生容量が増加します。そのため回路も工夫していかなければなりません。

また IC においても従来のアルミ配線から銅を用いた配線へと変化しました。その他誘電損失を少なくするために、誘電率の低下を実現するための新しい材料が研究されています。

開発期間の短縮

電機メーカーが半導体を発注する場合、他社よりもより早く製品を出荷して、市場で優位に立ちたいという要求は非常に大きな要求です。そのためには半導体をより早く出荷する必要があります。この問題は、回路の設計を全く新しく考案すると言うよりも、既存の回路をいかに効率よく利用していくかと言うことになります。よって回路の標準化が、必要になってきます。デジタル回路においては、標準化が可能で、実際に使われています。しかしアナログ信号を扱う場合は標準化が非常に困難であるため、未だに標準化

*1 ここで言っている保証期間とは、電気屋さんで言っている保証期間とは違います。国で決められた保証期間として、製品ごとに違います。「その保証期間の間、製品が故障した場合、修理するための部品を製造メーカーは供給しなければならない」という保証期間です。

は進んでいません。

外部素子の IC への取りこみ

外部素子を IC の中に取り込むということについては、二つの理由があります。一つは部品点数の削減により、電子機器製造メーカーのコストが減少し、IC としての商品価値が向上することです。もう一つの理由は、IC の中に取り込むことによって、信頼性が向上することです。これは IC 外部に部品がありますと、基盤への半田付け箇所が増え、信頼性が低下するためです。半田付けのような機械的な部分というのは、IC 内部よりも信頼性が低く、製品が壊れるのは主に機械的な部分だからです。

これらの IC 内部に取り込まれた外部部品としては、次のような部品があります。

大容量、高抵抗、コイル

小さい値の容量は、IC に取り込むことが簡単です。そうは言っても抵抗、コイルの場合も同様ですが、トランジスタに較べて非常に大きな面積が必要になります。よって容量、高抵抗、コイルを IC に取り込むにしても、そのことによって大幅に IC の値段が上昇したのでは意味がありません。そのために、高誘電率材料の開発、新しい回路の考案などの努力がなされました。

素子ばらつき

IC は、本質的に絶対値のばらつきとして ± 20 [%] が存在します。この数値は、ある日ある製造工程で ± 20 [%] ばらつくということではありません。一つの工程でのばらつきは、 $\pm 1 \sim 2$ [%] 程度しか有りません。 ± 20 [%] という数値は、同じ IC を何度も製造したときに生じる数値です。しかし日によってあるいは製造工程によってこれだけばらつくわけですので、これらのばらつきが生じて電子回路としては、十分な性能を出す必要があります。このことを実現するためには、回路的な工夫が必要になってきます。そのため様々な種類の回路

が考案されましたし、今もって新しい回路を目指して研究が続けられています。

1.2.2 技術向上

利益のためではなく、先程も述べましたように技術的好奇心からの発展もあります。その他に次のような内容が考えられます。

高電流、高電圧

小さな面積の中で、大電流を流したり、大電圧を取り扱うことは容易ではありません。この二つとも基本的な物理限界に関係する内容だからです。

電流の場合には、電流そのものよりも電流密度が重要です。いかなる物質であろうとも、電流密度には限界が存在します。その限界を超えると発熱で溶けてしまったり、そこまでいなくても結晶が壊れてしまいます。

解決方法の一例を述べますと、電流を分散させて合計電流が目的の電流となるように回路を工夫することが考えられ、実際に大電流を扱うトランジスタに用いられています。

電圧の場合には、構成されているイオン分子が移動したり、ひどいときには放電が起こって分子が壊れたり別の物質へと変化してしまいます。これは電界が集中することを防ぐことによって、ある程度防ぐことが出来ます。この対策としてはメサ型と呼ばれる素子を斜めにカットしたトランジスタが用いられています。このように構造上角張ったところを作らないようにするなどの工夫が、必要になります。

特性の向上

同じ回路であってもちょっとした工夫をすることによって、大きく性能を向上させることが出来ます。ICにおいてペア性を考慮しながらレイアウトを考えていくことは、この工夫の一つです。

ペア性は例えば二つのトランジスタをペア性の向上をするため、同じ形向きで近接させて製造するなどです。

現実に存在する受動素子*2は、理想的な特性からはずれているため、昔から Q を高くするための工夫が行われてきました。容量における紙によるコンデンサ、高誘電体材料を用いたコンデンサ、ガラストリマなどは、 Q を高くする工夫の現れです。

新しいシステムの提案

新しい要求が出てくるためあるいは今までに無い機能を行うためには、新しい回路が必要になってきます。時代が変化する度に、より新しい機能が求められるようになり、それによって新しい回路が必要になってきます。

新しい回路を考案するためには、今現在何が求められているか、近い将来何が必要になるかを常に注視しておくことが大切です。全く何もないところから、突然新しい回路がひらめくということはありません。どのような新しい考え、新しいアイデアも常にその人が経験した内容の中から生まれてきます。そのためには、次のようなことについて常日頃考えておくことが大切です。

1. 何か新しい機能で実現出来ないか。
2. 現状のままで満足か。足りないモノはないか。
3. システムの簡略化は出来ないか。
4. もっと安く実現できないか。
5. 次のステップは、何か。社会の動きは、どちらへ向かっているか。

これらのことを考えていくために必要なことは、知的好奇心とすることになるでしょう。

*2 抵抗・容量・コイルのことです。

第 2 章

計測の基礎

様々な電気に関するパラメータを測定するには、どの様な種類の計測器があり、測定された値をどの様に取り扱うかと言うことが重要です。ここでは測定器の種類と測定値の取り扱いについて学んでいきます。

2.1 様々な測定器

測定器には様々な種類の装置が使われています。それらの測定器は、全て物理法則に基づいて製作されています。このことから測定器を理解するためには、物理法則を十分に理解しておくことが前提となります。

2.1.1 電流測定

電流測定において昔よく用いられたのは、ガルバノ・メータです。これは次の図に示すように測定しようとする電流を巻き線に流し、その巻き線を固定された値を持つ磁界の中に置き、磁界の反発力によって得られた角度を測定することにより求めます。

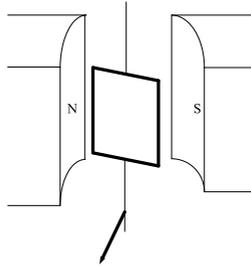


図 2.1 ガルバノ・メータ (1)

図 2.1 のようにコイルを置き、そのコイルの辺の長さを図 2.2 のように各々 a 、 b 、巻き数を n とします。磁束密度 \mathbf{B} の中でコイルに電流 \mathbf{i} が流れているとします。このときコイルの単位長さ当たりに生じる力の大きさは、電磁気学の結果から $\mathbf{B}i \sin \theta$ と与えられます。ここで θ は、磁束密度の向きと電流の向きとの角度です。この力の向きは、磁束密度と電流密度の向きに対して直角に生じます。その結果図で示しているコイル上下の a の部分は、大きさが同じで向きが逆方向ですので、お互いに打ち消しあいます。このことから b で示している部分の電流だけがトルクに対して影響を与えます。

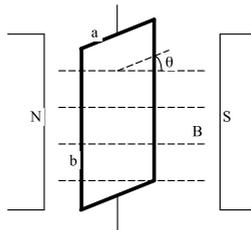


図 2.2 ガルバノ・メータ (2)

電流と磁界の角度は直角ですので、磁界によって生じるトルクの大きさ

は、次の式で与えられます。

$$T = a \times nb\mathbf{Bi} \quad (2.1)$$

回転角度に応じてトルクが大きくなります、例えばバネなどがありますと、角を ϕ として、次の式で与えられた角度で停止することになります。

$$c\phi = nab\mathbf{Bi} \quad (2.2)$$

この角度 ϕ に応じてメモリを付けておくと、角度は電流を示していることになります。この測定法は、非常に電流に対して敏感であるためよく用いられています。

その他に電流によって生じる磁界を測定し、そこから電流を求める方法もあります。これは電流プローブと呼んでいます。

実際の電流プローブは、ペンチのような形をしており、電流が流れているワイヤをそれで挟んで測定します。電流そのものを直接測定するわけではありませんので、非常に大きな値の電流も測定することが可能です。また電線を切断して計測器を挿入する必要もないので便利な計測器となっています。この原理は今でも特に高電圧での電流測定には欠かせない方法です。

2.1.2 電圧測定

電圧の測定にもガルバノ・メータが用いられていました。ただしこの場合電圧をそのままガルバノ・メータへ接続したのでは、大電流が流れてしまいます。そこで電圧を測定する場合には、ガルバノ・メータに直列抵抗を入れます。実際には電流を測定しているのですが抵抗が存在することにより、電圧を抵抗で割った電流が流れることになります。この関係を用いて、メータの指針の所に電圧をメモしておけば電圧を測定することが出来ます。

2.1.3 電力測定

電力は電流掛け電圧で表されることは、よくご存知のことだと思います。(2.1) 式を見ると電流以外に磁束が現れています。今までの説明では磁束として固定の磁石を用いていましたが、電流を用いれば磁束が生じることはよく知られています。この磁束を生じさせるために電流を用いますと、電流が式の中に変数として含まれてきます。つまり電流の二乗が得られるということになり、電力を測定していることになります。この原理は今でも家庭用の電力メータとして用いられています。

2.1.4 容量・インダクタンス

容量やインダクタンスは、ブリッジ回路を用いて測定することが普通です。ブリッジ回路についてが参考文献 [6] に詳しく説明していますので、ここでは簡単に結果だけを述べておきます。

ブリッジ回路とは、次の形をした回路のことを言っています。

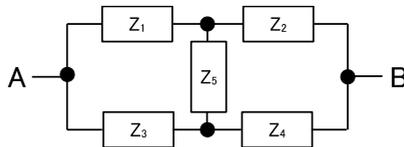


図 2.3 ブリッジ回路

回路図 2.3 の AB 端に電圧源を接続し、 Z_5 の両端子が同じ電圧になれば電流が流れませんので、次の式が成立すれば良いことになります。ここでは電源として直流電源の記号を使っていますが、交流電源であっても同じこと

が言えます。

$$\frac{z_2}{z_1 + z_2} = \frac{z_4}{z_3 + z_4}$$

この方程式を解きますと、回路は Z_5 の両端が同じ電圧であるための必要十分な条件は、次の関係式によって与えられます。

$$Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3 \quad (2.3)$$

このブリッジ回路は、実に様々の所で応用されています。特に計測機器においては良く用いられ、それらの代表的なブリッジについて回路の結果だけを示しておきます。

Wheatstone bridge

この回路はブリッジの中でもっとも簡単な構造であり、図のように検流計を挿入して抵抗の値を測定するために用いられます。

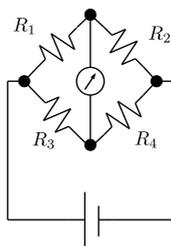


図 2.4 Wheatstone bridge

R_4 が未知である場合、(2.3) 式から

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} \quad (2.4)$$

であるとき、検流計に電流が流れなくなります。

Wien bridge

このブリッジは周波数などを測定しています。このブリッジの回路を図2.5に示しておきます。

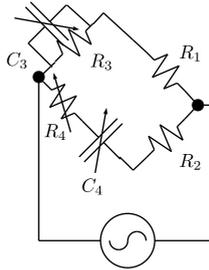


図 2.5 Wien bridge

次の二つの結果が得られます。

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{R_3 R_4 C_3 C_4}} \quad (2.5)$$

$$\frac{C_3}{C_4} = \frac{R_2}{R_1} - \frac{R_4}{R_3} \quad (2.6)$$

この式を用いることによって周波数の測定が行われます。

Maxwell bridge

このブリッジはインダクタンスや容量を測定するために用いられます。回路を図2.6に示しておきます。

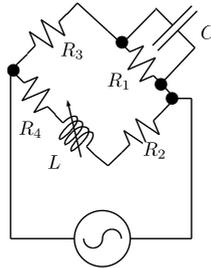


図 2.6 Maxwell bridge

二つの結果が出てきて、 L 、 R_4 が未知数である場合、次の式が得られます。

$$L = R_2 R_3 C \quad (2.7)$$

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} \quad (2.8)$$

C 、 R_1 が未知数である場合、次の式が得られます。

$$C = \frac{L}{R_2 R_3} \quad (2.9)$$

$$R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_4} \quad (2.10)$$

これらの式を用いることによってインダクタンス、容量が求められます。

2.2 有効数字

もし特別に何桁まで求めなさいという指示がなければ、暗黙の了解として通常 3 桁まで求めます。このとき第 4 桁目を四捨五入して 3 桁まで求めます。

これは昔大部分の計測器が針を用いて表示していたため、第 4 桁目を四捨五入して 3 桁までしか読みとれなかったことが原因でしょう。実際問題として電気においては 3 桁まで求まれば特にアナログ回路では十分な場合が多いようです。

現代のようにデジタル表示されるようになってきますともっと多くの桁数まで読みとることが可能になりますが、その場合でもよく物理法則を理解しておかないと無意味な数値を扱ってしまうことになりますので、注意が必要です。

第 3 章

ダイオード

ここではダイオードのモデル（等価回路）について述べています。近年マイクロ波領域を除いて電気電子回路設計は、特に小信号の場合は等価回路を用いて行われるようになりました。1970年頃はダイオード、トランジスタの性質がよく分かっていなかったため、中身が分からなくても済む四端子網解析が主流でした。四端子回路網については参考文献 [6] を参照して下さい。この四端子網解析は、今でもマイクロ波領域の回路設計に用いられていますが、現代の大規模な IC 回路設計に対しては、効率の悪い設計法と言わざるを得ません。このことからこの著書においては、等価回路を用いた回路設計を中心に話を進めていきます。

3.1 大信号と小信号

この後半導体の等価回路を述べていきますが、その中で重要な概念があります。それは大信号と小信号です。この二つは、電子回路を学んでいくにあたって重要な概念ですので、ここでその意味について述べておきます。

電子回路を扱う場合において、大信号と小信号に分類する必要があります。これは数学的な取り扱いの難しさからくるためです。大信号は、非線形として取り扱う必要がありますし、小信号は、線形として取り扱う事が出来

ます。小信号の場合は、線形として扱われることから、比較的簡単に問題を解くことが出来ます。しかし大信号の場合には、非線形として取り扱わねばなりませんので、容易に解くことは出来ません。*1

電子回路におきましても、大信号と比べて小信号の場合にはフーリエ解析あるいはラプラス変換といわれる手法を用いることが出来ます。これに対して大信号の場合には、非線形微分方程式をそのまま解いていかなければなりません。しかもほとんどの非線形微分方程式は、解析的に解くことができませんので、数値解析が主体となってしまいます。数値解析が主体というのは、結果が数値で示されるわけですから、どのような要素がどの様に結果に対して反映されているかということを見出すことは出来ません。その結果暗闇の中で、手探りの状態で調べていく、そういった状況になってしまいます。

小信号の場合には、かなり詳しく電子回路の状態を調べることが出来ますので、そこから大信号についてある程度推測が可能となります。非線形な現象についての研究は、まだ過渡的な状態ですが、かなり分かってきたところもあります。しかし大部分は、ほとんど闇の中に埋もれているのが現実です。

3.2 ダイオードの種類

まずはじめにどのような種類のダイオードがあるか、ということから述べていきましょう。ダイオードの種類といっても、分類の仕方は様々に分かれています。次に示すような主な分け方があります。

1. 接合*2の数による分類
2. 信号の違いによる分類

*1 電圧。電流のグラフ上で直線となっているグラフを線形、曲がっている線を非線形と呼んでいます。

*2 違った性質を持つ材料がつなぎあわされている部分

3. 材料の違いによる分類

一番目の分類としては、ダイオードの分類というよりも、ダイオード、トランジスタ、サイリスタ、トライアックと呼ばれているように、別の製品として分類されています。二番目の分類は、大信号用とか小信号用、高周波・低周波用と呼ばれる分類方法です。三番目の分類は、シリコン・ダイオード、ガリウム砒素・ダイオードなどのホモ接合^{*3}、ショットキー・ダイオードなどのヘテロ接合^{*4}があります。ここでは、シリコン材料を用いたホモ接合のみについて説明をしていきます。

3.2.1 ダイオードの名称

半導体全般について言えることですが、日本においてはEIAJが全ての半導体の標準を決めています。欧米では、国が標準を決めることはあまり無く、主に民間の機関が行っていますので、日本の標準とは大きく異なります。ここでは日本でのダイオードに関する取り決めについて述べておきます。

まずはじめに、名称についてですが、次のようになっています。

名称	用途
1S****	汎用ダイオード
1SS****	ショットキー・ダイオード
1SV****	バリキャップ・ダイオードおよびPINダイオード
1SZ****	ツェナー・ダイオード

****の所には数字が入ります

表 3.1 ダイオードの名称

^{*3} 同じ種類の材料を用いて、含ませる不純物の種類が違うもの同士を接合

^{*4} 違った種類の材料を用いて接合した、例えばショットキー・ダイオードはシリコンとアルミを接合したものです。

3.3 ダイオード等価回路

ダイオードの電流電圧関係式として、次の式は良く知られています。

$$I = I_s \left[\exp\left(\frac{qV}{kT}\right) - 1 \right] \quad (3.1)$$

この式は非常に重要な式でして、バイポーラ・トランジスタにおいても頻繁に出てくる式ですので、十分に理解しておく必要があります。

この式は非線形となっていますが、小信号以外の大振幅信号に対しても使われています。ダイオードに大きな電圧が掛かった場合の電流の変化は、この式を用いて記述することが可能です。大きな信号の場合には、電圧のスケールを大きく取ると、次の図に示すようなダイオードの特性と見なすこともできます。

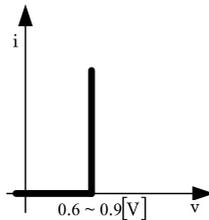


図 3.1 ダイオードの大信号特性

この図を見るとわかりますように、ダイオード特性は $0.6 \sim 0.9$ [V] で折れ曲がった直線となっています。これは、ダイオードがスイッチとして働かせることが出来ることを示しています。例えば電圧 -1 [V] と電圧 $+1$ [V] のところで繰り返すと、OFF 状態と ON 状態を実現することが可能になります。この性質を利用した電子機器は、昔から良く用いられています。

また $0.6 \sim 0.9$ [V] のところで垂直に立ち上がっていますので、その部分で電圧源となることを示しています。つまりダイオードの両端は、参考文献

[6] で説明しましたように、 $0.6 \sim 0.9$ [V] の差電圧を持つ電圧源だということです。この性質を利用すると直流電圧は変化しますが、交流信号は変化しない素子を実現することが出来ます。その良い例としては、IC の中ではレベルシフト回路として、良く用いられています。

(3.1) 式は、PN 接合の部分のみを表しています。実際のダイオードにおいては、PN 接合以外の中性領域 と呼ばれる領域及びダイオードを支えるフレーム部分、ダイオードとフレームとを接続するボンディング・ワイヤーなどがあります。これらは近似的に、一つの抵抗で表すことが出来ます。

また (3.1) 式は、電圧の微小変化に対しては、一つの抵抗として与えられることを示しています。つまりその抵抗を R とすれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{q}{kT} I_s \exp\left(\frac{qV_0}{kT}\right) \\ &= g_m \end{aligned} \quad (3.2)$$

V_0 : 動作点の直流電圧

さらにダイオードには、接合容量が存在するため、ダイオード全体の小信号用の等価回路は、次のように与えられます。ここで R は勿論動作点直流電圧の関数です。

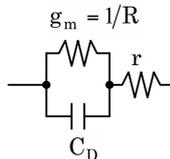


図 3.2 ダイオードの小信号用等価回路

この容量は小信号のときだけに現れるのではなく、大信号のときにも考慮

しなければなりません。容量を積極的に用いるためには、ダイオードに流れる電流が邪魔になります。そのことを回避するには、ダイオードに逆バイアスを掛けてやることによって実現することが出来ます。この性質を利用したダイオードがバリキャップ・ダイオードです。ただバリキャップ・ダイオードの場合には、容量の可変範囲を広げるためPN接合の不純物濃度を超階段接合と呼ばれる不純物分布を用いています。このバリキャップ・ダイオードを用いることによって、テレビやラジオでのオート・チューニングが可能となっています。

3.4 ダイオード・パラメータの測定

ここではダイオードの各種パラメータについての測定について、考えていきます。

3.4.1 順方向特性

ダイオードの順方向特性を測定する場合に気を付けなければならないことは、順方向の特性図を見ても分かる通り抵抗が非常に小さいと言うことです。このため順方向を単純に電源を接続してしまいますと、大電流が流れてしまいます。そのため測定する際には、ダイオードと電源の間に保護用として抵抗を挿入しておかねばなりません。

次に気を付けなければならない点として、順方向を測定する際にダイオードの中で電力が消費されるために熱が発生すると言うことです。このため約 $-2 [mV/deg]$ の値で、順方向電圧が減少していきます。これを避ける方法としては、電力の消費が少なくなるようにパルス上の電圧を印可して測定する方法があります。この値はトランジスタの場合も同じです。例えば $25[度]$ から $125[度]$ まで変化すると、電圧は $-0.1 [V]$ 変化することになります。元々 $0.6 \sim 0.9 [V]$ しかありませんので、かなり大きな変化です。しかもこの変化は通常の電子機器において、電子機器が放置された状態から電源

を投入される場合に生じる、しばしば発生する変化です。

これらの注意点を気を付けることによって、ようやく順方向の特性を正確に実行できることになります。

3.4.2 逆方向特性

ダイオードの逆方向測定において飽和電流を測定する場合、近年製造されているダイオードの飽和電流は、数 pF の非常に小さい値であることに注意が必要です。この様な小さな値の電流を測定するためには、ピコアンペア・メータという計測器を用いる必要があります。小さな値の電流を測定するには、測定装置全体を金属のシールドで覆うなどの工夫が必要になります。そうしないと測定物に蓄積されている電荷などが外部の光または人体に蓄積された電界などによって大きく変化してしまいます。

逆方法のブレイクダウン電圧を測定する場合は、順方向特性と同じような注意が必要です。ブレイクダウンの点では、抵抗がゼロに近い値となるためです。

3.4.3 容量測定

容量は、キャパシタンス・メータやSパラメータ測定器で測定されます。

キャパシタンス・メータによる測定の場合3端子法と呼ばれている方法が用いられています。計測器のHI端子やLO端子との間にダイオードを接続し、GND端子は筐体などのケースに接続されます。こうすることによって、HI端子とLO端子とGNDの間に存在する容量は、測定値に影響しなくなります。

順方向で測定する場合には、流れる電流がどこを經由して流れるかと言うことに注意しなければなりません。間違って計測器の方へ流れた場合、その電流が測定値に影響を与えていないかどうかをよく調べる必要があります。このためには、計測器の中身をよく調べておかねばなりません。

Sパラメータによる測定の場合には、基準である開放、短絡、整合の条件が十分に満足されていることに注意する必要があります。

3.4.4 直列抵抗

直列抵抗を測定する方法としては、順方向に大きな電流を流し、ダイオードの指数関数からどの程度ずれるかを調べることによって求める方法と、Sパラメータを用いて測定する方法とがあります。

ダイオードの順方向で大きな電流を流す方法は、当然の事ながら大きな熱が発生することになりますので、測定の途中で測定値が大きく変化します。その様な影響を排除して行わないと得られた結果は、当然真の値とは大きくずれてしまうので注意が必要です。

Sパラメータを用いて測定する場合、直流では得られない測定も行うことが可能ですが、寄生素子の影響が出てきますので、これらの素子の影響がどの程度あるか、慎重に測定を行わねばなりません。

第 4 章

トランジスタ

トランジスタの詳しい説明や、最新のモデルなどについては、参考文献 [2] を御覧ください。

またトランジスタ（バイポーラ・トランジスタや MOSFET：電界効果トランジスタ）を使った回路設計については参考文献 [5] を御覧ください。ここでは実際の回路設計に関わる話に限定して述べることにします。

4.1 トランジスタの種類

まずはじめにどのような種類のトランジスタがあるか、ということから述べていきましょう。トランジスタの種類といっても、分類の仕方は様々に分かれています。次に示すような分け方があります。

1. 構造による分類
2. 信号の違いによる分類
3. 材料の違いによる分類

一番目の分類としては、バイポーラ・トランジスタと MOS(Metal Oxide Semiconductor)FET、接合 (Junction)FET と分類されています。この章では、バイポーラ・トランジスタと MOS(Metal Oxide Semiconductor)FET のみに

ついて述べています。MESFET や GaAs などの トランジスタについては扱っていません。一部参考文献 [2] で説明していますので、興味のある方はご覧下さい。

二番目の分類は、大信号用とか小信号用、高周波・低周波用と呼ばれる分類方法です。例えば、オーディオ用、テレビ用、マイクロ波用などです。

三番目の分類は、シリコン・トランジスタ、ガリウム砒素・トランジスタなどの分類です。この章では、シリコン材料を用いたトランジスタについて説明をしていきます。

4.1.1 トランジスタの名称

半導体全般について言えることですが、日本においては EIAJ が全ての半導体の標準を決めています。欧米では、国が標準を決めることはあまり無く、主に民間の機関が行っていますので、日本の標準とは大きく異なります。ここでは日本でのトランジスタに関する取り決めについて述べておきます。

まずはじめに、名称についてですが、次のようになっています。

名称	用途
2SA****	高周波用 PNP バイポーラ・トランジスタ
2SB****	低周波用 PNP バイポーラ・トランジスタ
2SC****	高周波用 NPN バイポーラ・トランジスタ
2SD****	低周波用 NPN バイポーラ・トランジスタ
2SK****	MOS および接合 FET
3SK****	デュアルゲート・FET

****の所には数字が入ります

表 4.1 トランジスタの名称

4.2 トランジスタの等価回路

ここでは回路設計において重要なトランジスタの等価回路 (Equivalent Circuit) について考えていきます。

電気電子回路の場合、等価回路とモデルは余り区別せずに用いる傾向があります。特に大きな混乱は生じないのですが、初めて電気電子回路に関わる人にとっては、等価回路と言ったりモデルと言ったりするので、奇異に感じるかもしれません。

本論にはいる前に、トランジスタの等価回路発展の歴史を簡単に振り返ってみます。また著書の中でバイポーラ・トランジスタのことを BJT(Bipolar Junction Transistor) と略して記述しています。

次に簡単なトランジスタ等価回路の発展の歴史についての図を掲載しておきます。

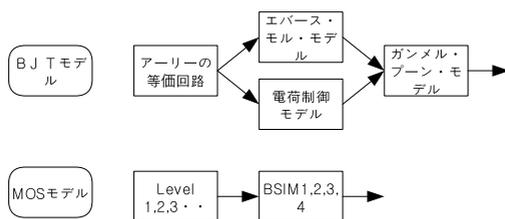


図 4.1 トランジスタ等価回路の歴史

4.3 簡略化した BJT 等価回路

たとえ直流のみを扱うにしても、何らかのモデルが必要となってきます。ただ直流というのは、トランジスタ特性の広い領域の一つの動作点のみを使用する場合がありますが、どの動作点かは分かりません。つまりトランジ

スタの線形な部分を使うこともありますし、非線形部分を使うこともあります。よってこの要求に適したモデルとして、全ての動作範囲を示す大信号モデルが必要になります。そのため回路設計者は、今では少し古くなってしまいましたが、ガンメル・プーン・モデルが活性領域において正確に実際のBJTを表現していることと、新しく開発されたモデルは複雑過ぎで少々の手にはおえません。新しいモデルの簡単な説明は参考文献 [2] にて説明していますので、御覧下さい。

実際の回路設計に置いてはガンメル・プーン・モデルよりも簡単なエバース・モル・モデルを、しかもさらに簡略化したモデルを用いることとなります。その簡略化したエバース・モル・モデルを図4.2に示します。ここで I_C と V_{BE} の間には、次の関係があります。

$$I_C = I_S \left[\exp\left(\frac{V_{BE}}{V_T}\right) - 1 \right] \quad (4.1)$$

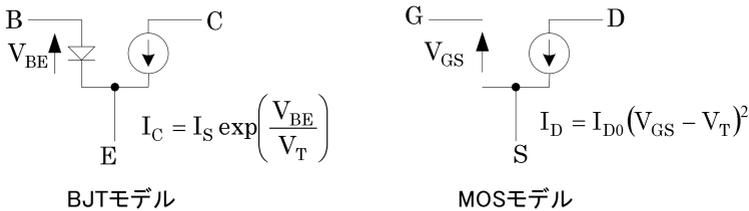


図 4.2 簡略化モデル

ここで V_T は熱電圧 (Thermal Voltage) とよばれ、ダイオードの式で出てきたパラメータを用いて $V_T = kT/q$ と表現できます。

4.3.1 簡略化した交流等価回路

次に交流の等価回路について述べます。このモデルは、ガンメル・プーン・モデルの微分を取ることによって求められます。図 4.3 にハイブリッド π ・モデルと呼ばれている回路を描いておきます。

ガンメル・プーン・モデルは回路シミュレーションである SPICE が開発されたときに導入された BJT モデルでして、今ではより新しいモデルに代わっています。ここでは全てのモデルに共通して用いることが出来る、より簡単なハイブリッド π ・交流モデルを使っていきます。

このモデルはトランジスタの低域周波数から高域周波数まで説明することが出来、参考文献 [7] [8] [9] [10] において一貫した理論展開の基礎として用いられています。

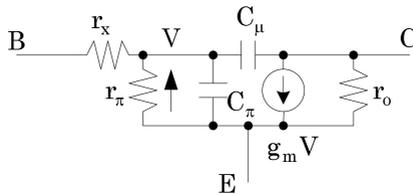


図 4.3 ハイブリッド π モデル

このモデルも非常に結構複雑で、市販の本の殆どはこのモデルをそのまま使って回路設計を行っています。このモデルは参考文献 [5] に述べていますように、簡略化モデルとしてたった二つだけの素子で十分に正確なモデルで表現できます。

ここではその手順は参考文献 [5] を見ていただくことにし、結果だけを簡単に述べておきます。次の章からこの簡略化モデルの説明を行います。周波数領域を低周波の場合と高周波の場合に分けて述べています。

$f_T/f \gg \beta_0$ の低周波の場合

交流の H パラメータは、次式で与えられます。この場合は低周波の扱いとなり、次の式が成立します。

$$g_\pi \gg \omega(C_\pi + C_\mu) \gg \omega C_\mu \quad (4.2)$$

ただし

$$\beta_0 = r_\pi g_m \quad (4.3)$$

$$f_T = \frac{g_m}{2\pi(C_\pi + C_\mu)} \quad (4.4)$$

(4.2) 式が成り立つとき、 g_π と比較して $\omega(C_\pi + C_\mu)$ と ωC_μ を無視しますと、モデルの H パラメータは、次のようになります。

$$h_{11} = r_x + \frac{1}{g_\pi} \quad (4.5)$$

$$h_{12} = 0 \quad (4.6)$$

$$h_{21} = \beta_0 \quad (4.7)$$

$$h_{22} = 0 \quad (4.8)$$

以上よりハイブリッド π ・モデルは、図 4.4 のように与えられます。

$f_T/f \ll \beta_0$ の高周波の場合

$$g_\pi \ll \omega(C_\pi + C_\mu)$$

が成立するときこのときの H パラメータは、 g_π を無視しますと、次のよ

うに与えられます。

$$h_{11} = r_x + \frac{1}{j\omega(C_\pi + C_\mu)} \tag{4.9}$$

$$h_{12} = \frac{C_\mu}{C_\pi + C_\mu} \tag{4.10}$$

$$h_{21} = \frac{g_m - j\omega C_\mu}{j\omega(C_\pi + C_\mu)} \tag{4.11}$$

$$h_{22} = j\omega C_\mu \frac{g_m + g_\pi + j\omega C_\pi}{j\omega(C_\pi + C_\mu)} \tag{4.12}$$

r_o の値は通常 $[M\Omega]$ の値を持つためトランジスタに接続される負荷の値を考えると、通常その値は非常に大きいので、無視しても通常さしつかえありません。しかし特にオーディオ回路の場合のように同相除去比が重要になる場合には、例えば電源を家庭用の交流信号から供給するような場合には、電源ラインにわずかな交流信号が乗っていることが多いため、この r_o 抵抗によって増幅されてしまいますので、注意が必要です。

r_x の値は、雑音などを考える場合重要ですが、 r_π 、 C_π の値に較べ普通は小さいので、第1近似としては無視することが出来ます。しかし $f_T/f \cong \beta_0$ の場合は、無視することが難しい場合があり、そのときはベースに直列にこの抵抗を挿入して考えれば大丈夫です。

以上よりハイブリッド π ・モデルは、図 4.5 に示すように近似することが出来ます。

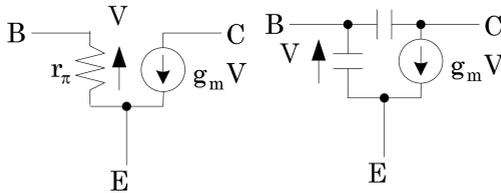


図 4.4 低周波用簡易等価回路

図 4.5 高周波用簡易等価回路

これらの等価回路にはもう一つ重要な要素が抜けています。それは IC の場合トランジスタは BJT の場合も MOS の場合も同様に各種素子がお互い干渉しないようにアイソレーションと呼ばれる分離層で囲まれていることです。このアイソレーションによって BJT ではコレクタと基盤の間、MOS ではドレインと基盤の間はかなり大きな寄生容量と言われる容量が必ず入ることです。この結果増幅器の場合ある程度の増幅度を超えて増幅は出来ません。コレクタに接続される負荷抵抗が極端に小さい場合、この容量の影響がほとんど無視できるようになることは言うまでもありません。

その他にコレクタ電圧の変化によってベース幅が変化します。これはアーリー効果と呼ばれており、モデルではコレクタとエミッタの間の抵抗、先に出てきました r_o の抵抗を挿入することによって表現できます。通常数 100 [M Ω] の大きさで、通常回路設計に大きな影響を与えませんが、*1むしろアイソレーションによる容量の影響のほうが大きく現れますので無視される場合が多いようです。

以上の結果から分かりますように、 f_T/f という式が BJT をどのように扱うかということを考える判断を与える式ということが分かります。この式の中で β_0 は、直流における値であることが重要です。別の言い方をすると BJT の場合、この β_0 に動作周波数 f を掛けた値が f_T よりも大きいかどうかによって判断が分かれるということです。もし $f_T/f \cong \beta_0$ の場合には、元の複雑なハイブリッド π ・モデルを使わなければなりません。

IC の設計などにおいては、複雑なハイブリッド π ・モデルを使わないように値の大きな f_T を持つトランジスタが使われています。これは設計をしやすくするために重要なことです。

*1 後ほど述べますように同相信号除去比に大きな影響を与えます。

4.3.2 飽和領域の表現

飽和領域を表現するための、簡略化したモデルがあります。このモデルは実に簡単な回路表現であって、図 4.6 に示すように二つの電圧源から構成されます。

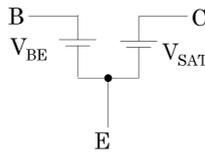


図 4.6 飽和特性

ここで

$$\begin{aligned} V_{BE} &= 0.6 \sim 0.8 \text{ [V]} \\ V_{SAT} &= 0.1 \sim 0.3 \text{ [V]} \end{aligned}$$

の値を持っていますが、 V_{BE} はトランジスタの製造工程に、 V_{SAT} はトランジスタを飽和させる程度によって大きく変化する値です。

4.3.3 カットオフ領域の表現

このモデルも至って簡単な回路形式となっています。たった三つの容量によって与えることが出来ます。その等価回路は、図 4.7 で与えられます。これらの容量の値は、トランジスタの二つの接合による容量と、サブストレートの影響による容量によって与えられます。ディスクリート・トランジスタ*2の場合には、当然サブストレート自体が存在しませんので、サブストレートに関わる容量は存在しません。

*2 個別半導体と呼ばれます。

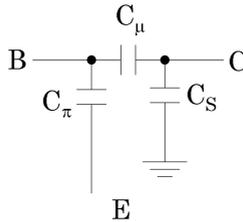


図 4.7 カットオフ領域の簡易等価回路

動作周波数が低い場合には、容量が無いものとみなしても問題ありません。この場合全ての端子は、開放状態となるだけです。

4.4 MOS における簡略化モデル

MOS における簡略化モデルを考えます。この場合、飽和状態、カットオフ状態におけるモデルを考える必要があります。このモデルは、BJT のモデルとよく似ています。

4.4.1 飽和状態におけるモデル

まず始めに MOS における飽和という言葉は、BJT の場合と違っていません。MOS での飽和領域というのは、BJT における活性領域に相当します。ついでに、BJT での飽和領域に相当する MOS の領域は、三極管領域と呼ばれています。

飽和状態における MOS モデルを考えます。MOS モデルも BSIM2、3、4 などの複雑なモデルが考案されていますが、ここでは最も簡単なモデル式から出発します。このときの MOS モデルの方程式は、次のように与えられます。

$$I_D = \frac{\mu_n C_{OX}}{2} \frac{W}{L} (V_{GS} - V_T)^2 \quad (4.13)$$

ここで

μ_n : 電子の移動度

C_{OX} : 単位面積当りのゲート酸化膜容量

W : ゲート幅

L : ゲート長

V_{GS} : ゲート～ソース間電圧

V_T : スレッショルド電圧

MOS の場合の小信号簡略化モデルとしては、(4.13) 式を微分することによって得られ、MOS の等価回路モデルとして BJT の簡略化モデルと似た、次の回路図 4.8 で示すようなモデルが得られます。

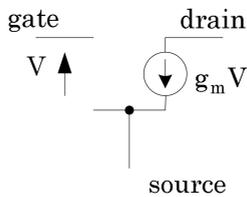


図 4.8 簡略化 MOS モデル

この回路図 4.8 の中で

$$g_m = \sqrt{2\mu_n C_{OS} \frac{W}{L} I_D} \quad (4.14)$$

このモデルのゲート側に抵抗を繋いでもゲートのインピーダンスが無限大ですので、電流は流れません。

ソース側から見たインピーダンス

ソースの電圧を V_0 とし、ソースに流れ込む電流を I_0 とすると、次の式が得られます。

$$V_0 = -V \quad (4.15)$$

$$I_0 = -g_m V \quad (4.16)$$

この二つの式から

$$\frac{V_0}{I_0} = \frac{-V}{-g_m V} = \frac{1}{g_m} = r_S \quad (4.17)$$

この式から、素子の製造プロセスが決まっているときソース側のインピーダンスを下げるためには、 W/L およびドレイン電流を大きくする必要があります。

ドレイン側から見たインピーダンス

ドレイン側には定電流源だけとなり、ソース側は開放状態ですので、ドレイン側およびゲート側から見たインピーダンスは共に無限大です。(4.13) 式は、簡略化したモデルであり正確ではありません。実際には実効チャンネル長が変化する*3からです。このことを考慮すると(4.13) 式は、次のように変形することが出来ます。

$$I_D = \frac{\mu_n C_{OX}}{2} \frac{W}{L} (V_{GS} - V_T)^2 \left(1 + \frac{V_{DS}}{V_A} \right) \quad (4.18)$$

ここで

V_A : アーリー電圧

この式で等価回路を考えると、図 4.8 の定電流源に並列にアーリー電圧による抵抗を入れなければなりません。

*3 BJT のアーリー効果に相当します。

4.4.2 三極管領域

三極管領域は、BJT における飽和領域に相当します。このときの方程式は、次のように与えられます。

$$I_D = \frac{\mu_n C_{OX}}{2} \frac{W}{L} [2(V_{GS} - V_T)V_{DS} - V_{DS}^2] \quad (4.19)$$

この方程式のグラフを考えると分かりますが、電流・電圧特性において、ちょうど三極真空管の特性曲線に似ています。このことから三極管領域と呼ばれています。

この領域は、一部可変抵抗として用いられることはありますが、それほど頻繁に用いられているわけではないので、この程度にしておきます。

最近低電源電圧回路の要求から、低電圧 MOS と呼ばれる素子領域が用いられています。低電圧になると二乗特性が指数関数へと変化します。欧米では積極的に用いられていますが、日本ではデジタルの方へ特化した関係で、そのような現象すらも殆ど知られていません。

4.4.3 カットオフ領域におけるモデル

このときの MOS の簡略化モデルは、図 4.9 に示しますように単に三つの端子に何も接続されない、簡単な回路によって与えられます。

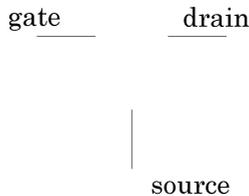


図 4.9 カットオフ領域におけるモデル

この回路も周波数が低い領域での等価回路でして、周波数が高い場合にはBJTと同じ用に容量を追加した等価回路を用いる必要があります。

4.5 簡略化モデルの公式

次に簡略化した等価回路を用いて、具体的により複雑な回路の問題を解いていくためのいわゆる公式について述べていきます。このことについては文献 [5] に詳しく説明してありますので、ここでは結果だけを述べておきます。

これらの公式をしっかりと理解しておけば、どのような複雑な回路であっても、その回路図を見れば、おおよそその動作が分かるようになってきます。このことは特に大規模な回路の解析や合成にとって、重要なことです。

4.5.1 BJT についての公式

直流の場合についての簡略化モデルの適用については、ただ単に簡略化されたエバース・モル・モデルを適用するだけです。ここでは特に説明をしません。

直流動作点の求め方も、実際の企業においては非常に簡単にしかも実務で正確に求める方法を用いています。具体的な計算方法を参考文献 [5] に述べておりますので、御覧下さい。それを理解すれば市販の本にあるような複雑な計算は全く必要がないことが分かると思います。

エミッタ側からみた抵抗

ベースに抵抗 R_B が接続されているとき、エミッタ側から見た抵抗 Z_E は、次式で与えられます。

$$Z_E = r_e + R_B / \beta_0 \quad (4.20)$$

ここで r_e はエミッタ抵抗と呼ばれ、次の式で与えられます。

$$r_e = \frac{V_T}{I_C} \quad (4.21)$$

$$V_T = \frac{kT}{q} \quad (4.22)$$

- k : ボルツマン定数
 T : 絶対温度
 q : 素電荷
 I_C : コレクタ直流電流

通常室温 28[度] が用いられ $T = 300$ [K] として決めています。この場合 $V_T = 26$ [mV] になります。この値は回路設計において非常に重要ですので、しっかり記憶して下さい。

ベース側から見た抵抗

ベース側から見た抵抗 Z_B は、エミッタに抵抗 R_E が接続されているとき、次のように与えられます。

$$Z_B = \beta_0(r_e + R_E) \quad (4.23)$$

コレクタ側からみた場合

この場合はコレクタは電流源ですので、値としては無限大です。

ベースに信号が入ったときコレクタに生じる信号

エミッタと GND の間に抵抗 R_E が接続されているとします。次の式によってコレクタの生じる信号 i_C が得られます。

$$i_C = \frac{v_i}{r_e + R_E} \quad (4.24)$$

ベースに信号が入ったときのエミッタでの信号

エミッタに信号 v_i が入ったときにエミッタに生じる信号電圧 v_o は、次のように与えられます。このときエミッタと GND の間に抵抗 R_E が接続されているとします。

$$v_o = \frac{R_E}{r_e + R_E} v_i \quad (4.25)$$

4.5.2 MOS についての公式

同じように MOS についての公式を述べておきます。これらについても詳細は参考文献 [5] を御覧ください。

ソースから見た抵抗

ソース側から見た抵抗 Z_S は、次式で与えられます。

$$Z_S = r_{eS} \quad (4.26)$$

ゲートから見た抵抗

MOS はゲートが酸化膜で出来ていますので、当然のことながら無限大となります。

ゲートに信号が入ったときドレインに生じる信号

ソースと GND の間に抵抗 R_S が接続されているとします。次の式によってドレインに生じる信号 i_D が得られます。

$$i_D = \frac{v_i}{r_s + R_S} \quad (4.27)$$

ゲートに信号が入ったときのソースでの信号

ゲートに信号 v_i が入ったときにソースに生じる信号電圧 v_o は、次のように与えられます。このときソースと GND の間に抵抗 R_S が接続されているとします。

$$v_o = \frac{R_S}{r_s + R_S} v_i \quad (4.28)$$

4.5.3 まとめ

これまでの結果から、次のことが分かります。BJT について述べていますが、MOS の場合も同様に扱えることは分かると思います。

- あたかもエミッタに抵抗 r_e が存在しているかのように見えること。
- ベースラインから右側では左側の抵抗が β_0 で割った値、MOS の場合約 100 で割られたように見えること。
- ベースラインから左側では右側の抵抗が β_0 倍、MOS の場合約 100 を掛けたように見えること。

これらのことに注意すれば、上記の公式はすぐに覚えられると思います。

第 5 章

増幅器

これから先の各章では、参考文献 [5] では扱っていない内容を中心に述べていきます。参考文献では基本回路の設計方法について詳しく述べていますので、設計方法の基本についてはそちらの資料を見て下さい。その設計方法を理解していただくと、設計者が回路設計だけに注意を向けられることがよく分かると思います。つまり回路設計というのは覚える学問ではなく、考える学問であることを理解していただけたらと思います。

増幅器は、電子回路の中でもっとも基本的な機能回路です。なぜならば発振器は、帰還回路を持った増幅器ですし、変復調器は、使われている素子の非線形性を積極的に使った増幅器だからです。よって増幅器、発振器、変復調器という形に分類するのは、奇妙なことかもしれません。しかし昔から使われてきた分類で話を進めた方が、多分わかり易いと思います。

増幅器の解析や設計を理解する手順として、低周波用増幅器の解析や設計方法を理解し、次に高周波用増幅器の解析や設計を理解することが良い方法です。と言うのも高周波用の増幅器というのは、低周波用の増幅器で出てくるさまざまなパラメータに、さらに高周波用として必要なパラメータを付け加えることによって解析や設計が行われるからです。

ここで低周波と高周波の分類ですが、参考文献 [5] でも述べましたように f_T/f を基準にして分類することが出来ます。しかしこの周波数で明確に完

全に分類することは出来ません。実際は低周波から高周波に向かって徐々に新しい素子を考えていく必要があります。つまり徐々に低周波から高周波の方へ向かっていくということです。そのため第4章で述べたような正確なモデルのパラメータが必要になります。ガンメル・プーン・モデル以降のモデルにおいては少なくとも活性領域において、現実を忠実に計算できるようになりました。

低周波であっても周期が長いパルス波形であっても、急峻な立ち上がりや立ち下がりの方では高周波が含まれています。その結果急峻に変化する波形に対して計算機によるシミュレーションは必ず必要になります。

基本的な増幅器についての設計方法は参考文献 [5] で詳しく述べていますので、そちらを参考にしていただき、ここでは増幅器に関連する用語や、その他の現象について述べています。

5.1 デシベル (dB)

電気電子で扱う数値は、非常に広い範囲の数値ですので、その数値をそのまま扱うよりは、対数を取った方が便利となります。ここではデシベルについてまとめておきました。デシベルといっても色々な種類があります。

$dB(dB_{\mu})$

もっとも一般的に、用いられる単位で、で電圧、電流に対して用いられ、次のように定義されています。

$$I = 20 \times \log A \quad (5.1)$$

$$V = 20 \times \log B \quad (5.2)$$

A の値が比を表している場合には、単にデシベル dB と呼ばれますが、 $1 [\mu V]$ を基準に取った場合のデシベルのことをデービー・マイクロ dB_{μ} と呼んでいます。これも単にデシベル dB と呼ばれることもあります。

dB_m

これは電力に対して用いられ、1 [mW] を基準に取ったデシベルを示しています。次のように定義されています。また呼び方は、デービーエムと呼んでいます。

$$P = 10 \times \log p \quad (5.3)$$

この場合と、電流、電圧の場合とは、 $p = i^2 R$ 、 $p = v^2 / R$ ですので、次のような関係があります。

$$P = I + 10 \times \log R \quad (5.4)$$

$$P = V - 10 \times \log R \quad (5.5)$$

ここで $P = 10 \times \log p$ です。

 dB_C

この表現は、変復調器回路のような場合によく用いられます。搬送波 (Carrier) を基準に取った場合のデシベル表示です。デービーシーと呼んでいます。変調が掛かっている信号などを表現するために用いられています。勿論電圧、電流の場合は、 \log の 20 倍、電力の場合には、10 倍となります。

その他に音響関係では、様々な種類のデシベル表示が用いられていますが、あまり一般的ではないので省略します。

デシベル表示は、極端に大きなあるいは、極端に小さな数値を身近な数値として表現できること以外に、増幅器が多段に接続された様な場合にも簡単に和の形で表現できるので、回路設計に関係する人にとっては必須の表現となっています。

例えば多段増幅器において入力から出力までに電圧を $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ としたときの全体の利得は、

$$\frac{V_2}{V_1} \times \frac{V_3}{V_2} \times \dots \times \frac{V_n}{V_{n-1}}$$

となりますが、この対数を取ることによって掛け算が足し算となることはご存知でしょう。この様に多段増幅器の全体の利得は、単に各増幅器の利得のデシベル表示を加え合わせていくことによって得られます。

その他に回路の周波数特性を表現する場合などに頻繁に用いられます。

参考のために、次の数値は覚えておくと回路を解析または設計する場合に役に立ちます。

$$20 \log 2 \cong 6 \quad (5.6)$$

$$20 \log 10 \cong 20 \quad (5.7)$$

5.2 利得

利得とは、回路の入出力比のことを示していますが、これにも色々な定義が存在します。これらの定義を、次に示しておきます。

電流比利得

$$G_I = \frac{\text{出力電流}}{\text{入力電流}} \quad (5.8)$$

電圧比利得

$$G_V = \frac{\text{出力電圧}}{\text{入力電圧}} \quad (5.9)$$

伝達比利得

$$G_{Z, Y} = \frac{\text{出力電流}}{\text{入力電圧}} \text{ or } \frac{\text{出力電圧}}{\text{入力電流}} \quad (5.10)$$

変換器利得

$$G_T = \frac{\text{負荷に与えられる電力}}{\text{入力から取り出しうる最大電力}} \quad (5.11)$$

電力利得

$$G = \frac{\text{負荷に与えられる電力}}{\text{入力から出てくる電力}} \quad (5.12)$$

有能電力利得

$$G_A = \frac{\text{負荷へ与えられうる最大電力}}{\text{入力から取り出しうる最大電力}} \quad (5.13)$$

これらの利得は、電流、電圧の場合は 20 倍、電力の場合 10 倍と決められています。この様に利得も様々な種類がありますが、状況に合わせて使い分けていくことが大切です。

電圧利得も含めて参考文献 [6] に四端子網の一般化変数を用いた式を紹介しておきましたのでご覧ください。

5.3 雑音

この節ではまず簡単に雑音の等価回路の説明を行い、次に回路の問題に対して雑音がどの様に影響を与えるかについて述べることにします。

5.3.1 雑音の種類

雑音の種類として、次のものがあります。

1. ショット雑音
2. 熱雑音
3. フリッカー雑音 (1/f 雑音)
4. バースト雑音 (ポップコーン雑音)
5. アバランシェ雑音

ショット雑音と熱雑音は、白色雑音 (ホワイト雑音) とも呼ばれます。白色雑音と呼ばれるのは、自然界の太陽光の場合、全ての周波数成分が含まれているように、すべての周波数の雑音が均一に含まれているからです。

次にこれらの雑音について簡単に説明します。詳しい式の導き方などは、熱統計力学などの知識が必要となります。これらの式は、雑音に関する専門書 [27][28] [29] に任せて、ここでは簡単に結果だけを紹介しておきます。

雑音の式を記述するに当たって、記号の上にバーがついている変数というのは、時間平均を意味しています。雑音は、ランダムな信号ですからある時間での信号の大きさを定義することは出来ません。そこで時間平均*1で定義することになります。

ショット雑音

これはトランジスタの P-N 接合などのエネルギーの壁を通過する電子またはホール等によって引き起こされる雑音で、次の式 Schottky の定理によって与えられます。

$$\overline{i^2} = 2qI_D df \quad (5.14)$$

ここで

q : 素電荷 クーロン
 I_D : 平均電流
 df : 帯域幅

この定理は、次のようにして証明されます。このためには、確率論に関する次の定理を用いなければなりません。

同じ様な独立事象が、平均 λ の割合で不規則に起こるとします。このときある時間 τ 中に起こる事象の数を n としますと、次の式が成立します。

$$\bar{n} = \lambda \tau \quad (5.15)$$

$$\overline{(n - \bar{n})^2} = \bar{n} = \lambda \tau \quad (5.16)$$

P-N 接合などの壁を通過する電子 またはホールは、不規則に起こる独立事象と考えられます。このときの移動する平均数は、電流を I としますと、

*1 有る時間の間の雑音電圧もしくは電流を加え合わせ、ある時間で割ること。

$\bar{n} = I\tau/q$ となりますので、(5.15)(5.16) 式から

$$\overline{(n - \bar{n})^2} = \bar{n} = \frac{I\tau}{q} \quad (5.17)$$

が得られます。ここで次の式で与えられる、電流偏差を定義します。

$$i_\tau = \frac{q(n - \bar{n})}{\tau} \quad (5.18)$$

(5.17) 式を用いますと、次の式が得られます。

$$\begin{aligned} \overline{i_\tau^2} &= \frac{q^2 \overline{(n - \bar{n})^2}}{\tau^2} \\ &= \frac{qI}{\tau} \end{aligned} \quad (5.19)$$

ここで再び揺らぎに関する確率の定理を用います。この定理によりますと、ある変数 X に関する揺らぎのフーリエ係数は、 $w(f) = 2\tau\overline{X^2}$ によって与えられます。この式と (5.19) 式から (5.14) 式が得られます。

熱雑音

これは抵抗体などに含まれている電子の熱運動によって引き起こされる雑音であり、抵抗値を R 、狭い範囲の周波数間隔 df とすれば、ボルツマン定数 k と絶対温度 T を用いて

$$\overline{v^2} = 4kTR df \quad (5.20)$$

と表されます。式より絶対零度 ($T = 0$) では熱雑音は存在しません。室温 300 [K] では、次のようになります。

$$\sqrt{\overline{v^2}} \cong 4 [mV/\sqrt{Hz}] \text{ at } 1 [k\Omega] \quad (5.21)$$

(5.20) 式は、次のようにして証明されます。Plank の調和振動子に対する等分配則によると、図 5.1(a) の L, C, R 並列共振回路の共振周波数を f_0 としますと

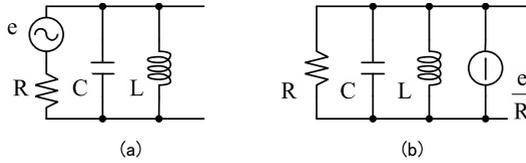


図 5.1 熱雑音を計算するための図

$$\frac{Li^2}{2} = \frac{Cv^2}{2} = \frac{kTp(f_0)}{2} \quad (5.22)$$

この式の中で、 i はコイルに流れる電流、 v は端子間電圧です。

この式から

$$\overline{v^2} = \frac{kT}{C} p(f_0) \quad (5.23)$$

ただし

$p(f) = \frac{hf}{kT} \frac{1}{\exp(hf/kT) - 1}$: Plank の係数 (ほとんど 1 に等しい)

$h = 6.62 \times 10^{-34}$ [joule · sec] : Plank の定数

$k = 1.38 \times 10^{-28}$ [joule/deg] : Boltzmann の定数

雑音電圧を抵抗 R に直列な電圧源とし、そのフーリエ係数を e としますと、次のように与えられます。

$$\overline{e^2} = w(f)df \quad (5.24)$$

この電圧源が入った回路にノートンの定理を適用した回路を、図 5.1 (b) に示します。この回路から共振回路の両端に生じる電圧は、次のようにな

ります。

$$v = \frac{e}{R} \frac{1}{1/R + j(\omega C - 1/\omega L)} \quad (5.25)$$

この式から電圧の二乗平均は、次の式として与えられます。

$$\begin{aligned} \overline{v^2} &= \int_0^\infty \frac{w(f)}{1 + (\omega C - 1/\omega L)^2 R^2} df \\ &= f_0 \int_0^\infty \frac{w(f_0) d(f/f_0)}{1 + (f/f_0 - f_0/f)^2 (\omega_0 C R)^2} \\ &= \frac{w(f_0)}{4CR} \end{aligned} \quad (5.26)$$

回路の Q が大きな場合には、 $f = f_0$ と置くことが出来ます。この式と (5.23) 式とが等しいとしますと、次の式が得られます。

$$w(f_0) = 4kTRp(f_0) \quad (5.27)$$

ゆえに (5.24) 式から、次の Nyquist の定理が得られます。

$$\overline{e^2} = 4kTRp(f_0)df \quad (5.28)$$

またこの雑音電圧を有能電力で表しますと $p(f_0)$ の 0 を省略して、

$$P = \frac{\overline{v^2}}{4R} = kTp(f)df \quad (5.29)$$

この式を見ると分かりますように抵抗値を含んでいないことに注意して下さい。また先程述べましたように $p(f) \cong 1$ ですので、 $p(f)$ は省略される場合があります

フリッカー雑音

この雑音はトランジスタなどの場合、空間電荷層中の不純物や格子欠陥によって生じるトラップによって引き起こされ、次の式によって表されます。

$$\overline{i^2} = K_1 \frac{I^a}{f^b} df \quad (5.30)$$

ここで

K_1 : 定数

$a = 0.5 \sim 2$: 定数

$b \cong 1$: 定数

バースト雑音

この雑音の原因は良く分かっていませんが、重金属の不純物によって引き起こされます。例えば金を含んでいるものは大きなバースト雑音を生じます。

バースト雑音は別名ポップコーン雑音とも呼ばれます。これはトウモロコシのポップコーンを作るときのように不連続な、しかも突然現れる雑音であることからその名前が付いています。

その他の雑音は、時間に対して連続した形で雑音が発生しますが、このバースト雑音は時間的に不規則な形で発生します。数秒間隔で発生する場合もありますし、時には数ヶ月の時間をおいて発生します。この様な現象であるため雑音として観察することが難しいということがあります。

一般的に非常に低周波領域で発生し、フリッカ雑音と同じように物質の界面で発生しているようです。よって MOSFET など発生しやすく、そのために増幅器の初段には、電子の通路が表面に近いところを通るためバースト雑音が発生しやすい MOSFET はなく、JFET (接合 FET) が用いられます。^{*2} または同様に半導体内部をキャリアが通過する BJT が用いられます。

バースト雑音は、次の式で表現できることが分かっています。

$$\overline{i^2} = K_2 \frac{I^c}{1 + (f/f_c)^2} df \quad (5.31)$$

ここで

^{*2} MESFET はゲートが PN 接合などで出来ていることと、電気を運ぶキャリアが表面ではなく、内部を通る為余計な雑音発生源が存在しません。

$c = 0.5 \sim 2$: 定数

f_c : 特性周波数

アバランシェ雑音

P-N 接合がツェナーまたはアバランシェ・ブレイクダウンしているときに発生する雑音です。これはデバイスの形状や Si 結晶の状態によって決まるため、式として表現することは難しく、理論的な研究もそれほど進んではいません。

5.4 歪の分類と定義

歪を考える前に、歪を分類しておく方がよいでしょう。これにも様々な分類方法が考えられますが、正弦波信号に対する歪とパルス信号に対する歪に分けて考えることにします。この歪を分類するために Prof. Willy Sansen[32] は、次のような分類を行っています。

線形歪・非線形歪

線形歪：これは一定の振幅あるいは線形な位相である増幅器などにおいて、つまり線形に近い増幅器において発生する歪です。線形に近い歪が少ない増幅器においてなぜ歪が生じるかということを一例をあげて述べます。例えばパルス波形を高域通過フィルタに通過させた場合、あるいは低域通過フィルタを通過させた場合などに起こる歪です。フィルタによって本来持っている周波数部分が減少します。このことによって、非線形ではないにもかかわらず生じる歪を示しています。

非線形歪：これは非線形な伝達関数を持った回路を通過したときに発生する歪です。これについては、すぐに納得できると思います。例えば正弦波信号がトランジスタ回路などを通過したとき

に、波形がクリップされたりすることによって発生する歪です。

弱い歪・強い歪

弱い歪：非線形性がゆるやかに変化している回路を通過した場合など、元の正弦波信号は準正弦波信号として留まります。このような歪を指しています。この歪は信号を小さくしていくにつれて歪が小さくなっていきますが、決してゼロになることはありません。

強い歪：これは急激に変化する非線形歪のことを指しています。例えばB級増幅器のように波形の一部がカットオフされ、結果として元の正弦波信号の滑らかさが失われてしまうような歪を指しています。このカットオフ部分には非常に多くの高調波が含まれることとなります。この場合には信号がある程度小さくなると、突然歪が無くなるという特徴を持っています。

正弦波信号に対する歪のうち、波形そのものに対する呼称は特にありません。正弦波についての歪は、正弦波形からどの程度ずれているかによって、歪の程度を表現するのが普通です。次に歪を表現するための方法について Willy Sansen が求めた弱い歪についての解析を述べておきます。

5.4.1 歪の解析 (弱い歪)

ここでは弱い歪を持った増幅器の歪の解析を行います。入力信号を $u(t)$ 、出力信号を $y(t)$ としますと、歪が存在するときのテーラー展開式として、次の式が得られます。

$$y[u(t)] = a_0 + a_1u(t) + a_2u(t)^2 + a_3u(t)^3 + \dots \quad (5.32)$$

この式の係数は、式の形から分かりますように、次のように与えられます。

$$a_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n y[u(t)]}{du^n} \right|_{u(t)=0} \quad (5.33)$$

入力信号として、次の式で示す信号を用います。

$$u(t) = U \cos(\omega t) \quad (5.34)$$

この入力信号のときの出力信号は、式を整理すると次のようになります。

$$y(t) = \left(a_0 + \frac{a_2}{2} U^2 \right) + \left(a_1 + \frac{3}{4} a_3 U^2 \right) U \cos(\omega t) \\ + \frac{a_2}{2} U^2 \cos(2\omega t) + \frac{a_3}{4} U^3 \cos(3\omega t) + \dots \quad (5.35)$$

5.4.2 各種定義

次にこの式を元にして、様々な歪に対する重要な式を求めていきます。

Harmonic Distortion

この歪は基本周波数成分に対する $n\omega$ の周波数成分の比で定義されます。上で求めた式を用いて、Harmonic Distortion は、次のように与えられます。ただしここで求めた式は、基本周波数成分の中に含まれている3次の高調波成分は、基本周波数成分に比べて小さいものとして省略しています。

$$HD_2 = \frac{1}{2} \left| \frac{a_2}{a_1} \right| U \quad (5.36)$$

$$HD_3 = \frac{1}{4} \left| \frac{a_3}{a_1} \right| U^2 \quad (5.37)$$

以下同様にして与えられます。この式を見ると2次の Harmonic Distortion は U に比例し、3次の Harmonic Distortion は U^2 に比例していることが分かります。このことは入力振幅を 1 [dB] 増加すると HD_2 は 1 [dB] 増加し、 HD_3 は 2 [dB] 増加することを意味しています。実際の歪の関係をグラフに描くと、次の図 5.2 のように与えられます。

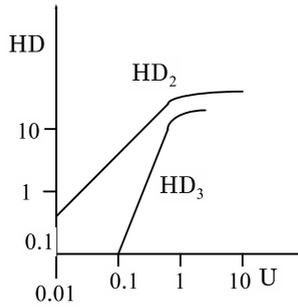


図 5.2 現実の 2 次、3 次高調波

この図から分かりますように現実の歪の値は、信号振幅が大きいところでは飽和してしまいます。ここでは信号振幅が小さい場合についてのみ考えることにします。

THD(Total Harmonic Distortion)

次のように定義されています。

$$(THD) = \sqrt{HD_2^2 + HD_3^2 + \dots} \quad (5.38)$$

図 5.2 では、横軸が入力信号レベルとなっていますが、これを横軸が周波数となるようにした図をスペクトラム図と呼んでいます。歪を示すスペクトラム図の例を、図 5.3 に示しておきます。

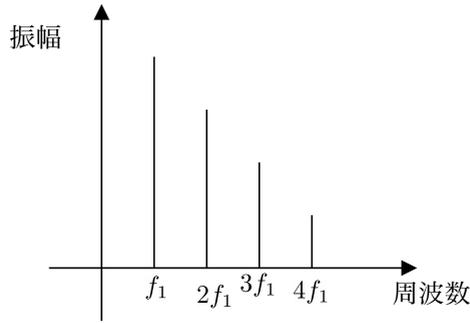


図 5.3 歪の周波数スペクトラム

5.5 Intermodulation

次の intermodulation は、二つの周波数は異なるが、振幅が同じである信号入力によって生じる出力振幅の歪について考えます。

この場合の入力信号は、 $u(t) = U \cos(\omega_1 t) + U \cos(\omega_2 t)$ として与えられます。回路の伝達特性を与える式は、(5.32) 式で与えられる同じ式を用いることが出来ます。

この式を使って様々な高調波を計算した結果を表 5.1 に求めておきました。

この結果 2 次と 3 次の intermodulation は、各々次のように与えられます。2 次の場合は、周波数が ω_1 または ω_2 の出力振幅に対する、周波数が $\omega_1 \pm \omega_2$ となる歪の振幅の比として与えられます。ここでも基本波に対する高調波成分は小さいとしています。

$$IM_2 = \left| \frac{a_2}{a_1} \right| U \quad (5.39)$$

3 次の場合には分母は共通ですが、分子は周波数が $2\omega_1 \pm \omega_2$ 、 $2\omega_2 \pm \omega_1$ で与えられる歪のうち、 $2\omega_2 - \omega_1$ の周波数値を持つ歪の振幅によって定義

されます。しかしこれら四つの成分は、表 5.1 から分かりますように、すべて同じ値となります。

$$IM_3 = \frac{3}{4} \left| \frac{a_3}{a_1} \right| U^2 \quad (5.40)$$

これらの式と (5.36)(5.38) 式とを比較しますと、次の関係が成立することが分かります。

$$IM_2 = 2HD_2 \quad (5.41)$$

$$IM_3 = 3HD_3 \quad (5.42)$$

この結果から弱い歪の場合には、Harmonic distortion と Intermodulation の間には 1 対 1 の関係があることが分かります。

ただし IM_3 と HD_3 とでは基本波に対する高調波成分が異なっていることに注意が必要です。

周波数	振幅	備考
0	$a_0 + a_2 U^2$	DC
$\omega_2 - \omega_1$	$a_2 U^2$	IM_2
$2\omega_1 - \omega_2$	$\frac{3}{4} a_3 U^3$	IM_3
ω_1	$a_1 U + \frac{9}{4} a_3 U^3$	入力信号
ω_2	$a_1 U + \frac{9}{4} a_3 U^3$	入力信号
$2\omega_2 - \omega_1$	$\frac{3}{4} a_3 U^3$	IM_3
$2\omega_1$	$\frac{1}{2} a_2 U^2$	HD_2
$\omega_1 + \omega_2$	$a_2 U^2$	IM_2
$2\omega_2$	$\frac{1}{2} a_2 U^2$	HD_2
$3\omega_1$	$\frac{1}{4} a_3 U^3$	HD_3
$2\omega_1 + \omega_2$	$\frac{3}{4} a_3 U^3$	IM_3
$\omega_1 + 2\omega_2$	$\frac{3}{4} a_3 U^3$	IM_3
$3\omega_2$	$\frac{1}{4} a_3 U^3$	HD_3

表 5.1 2, 3 次 harmonic、intermodulation

上の表 5.1 は、周波数の低い順番に並べられています。簡単に分かりますように IM_3 を表す四つの周波数のうち $2\omega_1 - \omega_2$ と $2\omega_2 - \omega_1$ は、入力される信号周波数のすぐ近くに現れます。このことが IM_3 が重要である一つの理由となっています。

intercept または IP_3

この歪の表現の意味は、基本波の出力を入力を増大と共にまっすぐに延長した直線と、同様に 3 次歪み信号の出力を入力を増大と共にまっすぐに延長した直線との交点で、その交点での入力信号振幅によって定義されます。グラフで示しますと、次の図 5.4 ようになります。

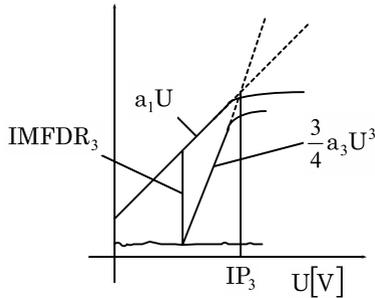


図 5.4 $IMFDR_3$

図 5.4 に示すように、基本波の出力は a_1U 、3 次の歪に対する出力は $3a_3U^3/4$ で表すことができますので、この二つの値が等しくなったときの入力振幅が IP_3 となります。ここで入力信号内の高調波成分は、基本成分より遥かに小さくして省略してあります。このときの入力を U_{IP3} としますと、

次の式が得られます。

$$\begin{aligned} IP_3 &= \sqrt{\frac{4a_1}{3a_3}} \\ &= \frac{U_{IP3}}{\sqrt{IM_3}} \end{aligned} \quad (5.43)$$

この式をデシベルで表示しますと、次のように表現することが出来ます。

$$20\log(IP_3) = 20\log(U_{IP3}) - 10\log(IM_3) \quad [dB] \quad (5.44)$$

Intermodulation free dynamic range ($IMFDR_3$)

$IMFDR$ は IM_3 が存在しないところでの、可能な最大ダイナミックレンジで定義されています。まず最初にダイナミックレンジ (DR) を定義します。これは最大出力 信号振幅に対する出力雑音振幅によって表されます。式で表現しますと、次のようになります。

$$DR = \frac{a_1 U}{V_{N_{out}}} \quad (5.45)$$

デシベルで表現しますと、次のように与えられます。

$$20\log(DR) = 20\log(U) - 20\log(V_{N_{in}}) \quad (5.46)$$

ただし

$$V_{N_{in}} = V_{N_{out}} / a_1 : \text{入力換算雑音}$$

$IMFDR$ の点は、図 5.4 から分かりますように IM_3 と $V_{N_{out}}$ とが等しい点 U_{IMF} となります。よって

$$V_{N_{out}} = \frac{3}{4} a_3 U_{IMF}^3 \quad (5.47)$$

この式で求められる入力振幅の値を (5.45) 式へ代入しますと、基本信号に

対して雑音は小さいとして次式が得られます。

$$\begin{aligned}
 IMFDR_3 &= \sqrt[3]{\frac{4 a_1^3}{3 a_3} \frac{1}{V_{N_{out}}^2}} \\
 &= \sqrt[3]{\frac{4 a_1}{3 a_3} \frac{1}{V_{N_{out}}^2}} \\
 &= \left(\frac{IP_3}{V_{N_{out}}} \right)^{2/3} \quad (5.48)
 \end{aligned}$$

$$20 \log(IMFDR_3) = \frac{40}{3} \log(IP_3 - V_{N_{in}}) \quad [dB] \quad (5.49)$$

-1 [dB] compression point

この歪を表現する方法は、基本波の出力振幅が -1 [dB] だけ小さくなったところでの入力振幅を示しています。(5.48) 式から、また -1 [dB] は 0.122 ですので

$$\begin{aligned}
 V_{-1 [dB]} &= \sqrt{0.122 \frac{4}{3} \left| \frac{a_1}{a_3} \right|} \\
 &= \sqrt{0.122} IP_3 \quad (5.50)
 \end{aligned}$$

デシベルで表示しますと、次のように表現することが出来ます。

$$20 \log(V_{-1 [dB]}) = 20 \log(IP_3) - 9.64 \quad [dB] \quad (5.51)$$

この式から compression point は、入力信号から見ますと、 IP_3 の点から約 10 [dB] 低下したところに存在していることが分かります。

Cross-modulation

この場合も二つの信号を用います。ただし一方の信号は低い周波数 ω_0 で変調されており、その変調度 (搬送波の振幅に対する変調信号の振幅) を

m_c とします。歪を受けることによって、低い周波数で変調されている信号によって、もう一方の信号 ω_2 も変調されることとなります。このことを **cross-modulation** と呼んでおり、テーラー展開の3次の項は次のようになります。

$$+6U^3 a_3 \cos^3(\omega_c t) m_1 \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_2 t) +$$

余弦関数の次の式を用います。

$$\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\omega t)}{2}$$

次のように表現することができます。

$$\begin{aligned} CM_3 &= \frac{3}{4} m_c \frac{a_3}{a_1} U^2 \\ &= m_c IM_3 \end{aligned} \tag{5.52}$$

このように **cross-modulation** は、3次の高調波のみに関係しています。

5.6 パルス信号の歪

パルス信号については、波形で示すことが出来ます。元のパルスと歪を受けたパルスとを比較して各種歪を描くと、次の図 5.5 のようになります。

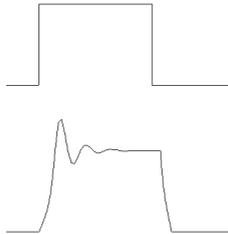


図 5.5 パルス応答

次にパルス歪のいろいろな定義について述べておきます。

遅延時間

入力信号に対する出力信号の遅れ時間のことを言っています。一般的には、信号の大きさの 50 [%] の所を基準にして測定されます。

立ち上がり時間

パルス波形が正常に立ち上がるまでの時間のことを言います。一般的には、信号の立ち上がりとパルスが入力されて定常の状態になるまでの振幅を基準にして、10 [%] から 90 [%] までの間の時間として求められます。

オーバーシュート

パルスが立ち上がり定常になる前に、定常波形を超える波形に対してこう呼ばれています。

リングング

オーバーシュートに似ていますが、波を打った波形に対してこう呼んでいます。

立ち下がり時間

パルス波形が正常に立ち下がるまでの時間のことを言います。一般的には、信号の立ち下がりとパルス波形が無くなって定常の状態になるまでの振幅を基準にして、90 [%] から 10 [%] までの間の時間として求められます。

アンダーシュート

パルス波形が立ち下がる時、最終の定常状態を超えて逆方向まで波形が延びる状態のことを指しています。

これらの他に歪波形そのものではありませんが、伝送線路の特性を与えるものとしてアイ開口率というのがあります。これは色々な振幅や幅のパルスを伝送線路に通した後、高さ、幅を規格化して、重ね合わせることで得られます。そうすると得られる図形はちょうど目が開いた様な形となり、その目が大きく見開いているほど伝送路の特性がよいであろうということから定められた規格です。

第 6 章

帰還増幅器

ただ単に信号を後方へ伝える回路形式とは別に、帰還回路という重要な概念が存在します。この帰還の概念は、様々な分野において用いられているばかりでなく、自然界に存在する多くの現象も帰還の概念を用いてうまく理解することが出来ます。

この帰還回路の設計方法として、大きく二つに分けることが出来ます。一つは **feedforward** と呼ばれ、もう一つは **feedback** と呼ばれている方法です。このうち **feedforward** の方法はあまり用いられることはありません。ここでは **feedback** 方法のみを取り上げることにします。

帰還にはさらに多重帰還や最適制御と呼ばれるものがありますが、ここでは主に単一の帰還のみについて考えています。

その他に非線形制御という分野がありますが、これについては参考文献 [35][36] のみにしておきます。

6.1 帰還の基礎

一般的に **feedback** 帰還回路は、次のブロック図で表現されます。実際の回路の場合には、この様な明確な形で分離することは難しい場合が多数存在します。その一つの例としては、このブロックにあるように明確にブロック

分けが難しい回路が多数存在します。しかし帰還回路の一般的表現として使用することに対しては、問題がありません。

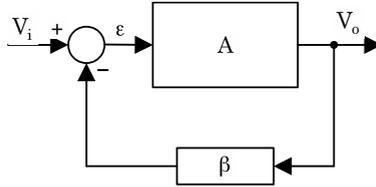


図 6.1 帰還ブロック

このブロック図から、次のような式が得られます。

$$V_o = \varepsilon A \quad (6.1)$$

$$\varepsilon = V_i - \beta V_o \quad (6.2)$$

この二つの式から ε を消去し、整理することによって次の式が得られます。

$$G = \frac{V_o}{V_i} = \frac{A}{1 + \beta A} \quad (6.3)$$

この式が帰還を表す一般式です。この式において A の値を無限大にしますと

$$G = \frac{1}{\beta} \quad (6.4)$$

となり、この式から分かりますことは、全体の利得が増幅器外部の β のみによって与えられることです。 A を無限大としたことからこの式は、無限大に近い利得を持つ演算増幅器を用いることによって実現することが出来ます。演算増幅器については、別の章で述べています。(6.3) 式から、帰還増幅器のその他の様々な特徴を導くことが出来ます。それらについて述べる前に、帰還に関する用語のいくつかを定義しておきます。まず A は開ループ利得、 βA はループ利得または 還送比、(6.3) 式で表される G は閉ループ利得と呼ばれます。

6.1.1 帰還回路の特徴

次に帰還回路の特徴を、(6.3)式から導きます。

利得変動の減少

帰還回路 β が無い場合、元の回路の利得 A が変動しているとし、帰還回路 β を追加することによって、その変動を押さえることができます。

(6.3)式より

$$\frac{dG}{dA} = \frac{1}{(1 + \beta A)^2} \quad (6.5)$$

この式と (6.3) 式より

$$\frac{dG}{G} = \frac{dA}{A} \frac{1}{1 + \beta A} \quad (6.6)$$

と与えられますので、利得の変動は元の帰還回路が無い場合に比べ、 $1/(1 + \beta A)$ 倍に減少することが分かります。勿論この変動が減少するという代償として、(6.3)式から分かりますように回路全体の利得自体も $1/(1 + \beta A)$ 倍減少していることが分かります。

歪みの減少

帰還が無い場合の出力レベルは、 A によって与えられます。帰還がある場合には、(6.3)式より

$$V_o = \left[\frac{V_i}{1 + \beta A} \right] A$$

と与えられます。この式と (6.3) 式を比較してみますと、同じ出力レベルを得るのに帰還の場合には $(1 + \beta A)$ 倍の入力レベルが相当していることになります。入力レベルのみで見ると、帰還が無い場合より、より大きい信号

レベルで同じ出力が得られることになります。つまり出力側に同じレベルの歪みを生じるには、帰還回路においては $V_i \times (1 + \beta A)$ 倍の入力信号レベルが必要となります。よって帰還回路によって出力側へ与える歪みのレベルは、その影響が小さくなります。

感度の減少

利得 A が大きい場合には、全体の利得は (6.4) 式のように与えられますので、 β の値が変動を受けない素子から出来ていれば、回路全体は何の変動も受けません。

利得 A が有限の場合には、(6.6) 式より感度 S_A は、次のようになります。

$$\begin{aligned} S_A &= \frac{dG/G}{dA/A} \\ &= \frac{1}{1 + \beta A} \end{aligned} \quad (6.7)$$

6.1.2 雑音の影響

雑音の影響について考えるため、次の図のようなブロック図 6.2 を考えます。

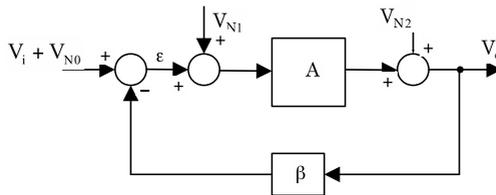


図 6.2 帰還回路への雑音の影響

ブロック図より、次の式が得られます。

$$A(V_i + V_{N0} - \beta V_o + V_{N1}) + V_{N2} = V_o$$

この式より

$$V_o = \frac{A(V_i + V_{N0} + V_{N1}) + V_{N2}}{1 + \beta A} \quad (6.8)$$

また $\beta = 0$ の場合、つまり帰還が無いときを考えますと

$$V_o = A(V_i + V_{N0} + V_{N1}) + V_{N2} \quad (6.9)$$

となります。(6.8) から出力側の S/N 比を求めますと、次のようになります。

$$\frac{\frac{A}{1+\beta A} V_i}{\frac{A(V_{N0}+V_{N1})+V_{N2}}{1+\beta A}} = \frac{AV_i}{A(V_{N0}+V_{N1})+V_{N2}}$$

(6.9) 式から同じように S/N 比を求めると、全く同じ式が得られることが分かります。S/N 比は、帰還があっても無くても同じであることが分かりました。つまり帰還は雑音に対して何の影響も与えないのです。S/N 比が同じであると言うことは、すなわち NF も同じ結果となることを示しています。これは特に説明することもないでしょう。

6.2 伝達特性

ここでは帰還の伝達特性について述べます。これから述べる関係式は、帰還回路を解析する場合に重要な式です。

6.2.1 ループ利得

ループ利得(還送比)について考えます。ループ利得を求める前に、ループ利得を求めるために重要な Blackman の定理を述べておきます。この Blackman の定理とは、次のように与えられています。

定理 1 Blackman の定理

従属電源が含まれる回路において、制御電源の値を 1 とし、回路を一周し

たときの利得を求め、その値にマイナスをつけた値が帰還増幅器の利得になります。

この Blackman の定理を用いることによって、図 6.1 のループ利得は $T = \beta A$ と与えられます。実際の回路においてループ利得の計算は、ループ内のどこの点において計算しても問題無いのですが、一般的に複雑な計算になります。しかし半導体素子のように従属電源が含まれている場合は、その点でループを切って考えると便利です。その従属電源は、半導体素子の等価回路の中で用いられており、BJT、MOSFET いずれも一般式的に次の形で表現することが出来ます。

$$x_2 = kx_1 \quad (6.10)$$

ここで

k : 定数

x_1 : 入力 of 電流または電圧

x_2 : 出力 of 電流または電圧

次のブロック図を考えます。

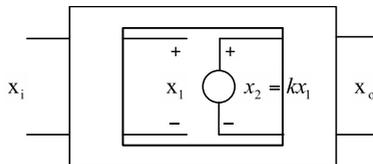


図 6.3 Blackman 公式の説明

(6.10) 式において x_2/x_1 の値は、まさにループ利得の定義 そのものですので、(6.10) 式において $x_1 = 1$ として x_2 を求めることによって得られます。半導体の場合必ず反転しますので、求めた値にマイナスを掛けなければなりません。これはすなわち $T = \beta A$ の値を求めることと同じです。この計算に

において、独立電源は関係がありませんので、計算に当たって電源は殺して*1おく必要があります。

信号の伝達特性を調べます。図 6.3 において、回路全体の入出力を考慮しなければなりません、従属電源のパラメータも利用して次式が得られます。

$$x_1 = G_1 x_i - G_2 x_2 \quad (6.11)$$

$$x_o = G_3 x_i + G_4 x_2 \quad (6.12)$$

図 6.3 の中で、二つの四角によって囲まれた部分には、回路の帰還部分も含んだその他の回路が含まれることに注意して下さい。

(6.10)(6.11) (6.12) 式より x_1, x_2 を消去して

$$x_o = \frac{G_3 + k(G_1 G_4 + G_2 G_3)}{1 + kG_2} x_i \quad (6.13)$$

となります。この式とループ利得との関係は、次のように与えられます。

$$T = kG_2 \quad (6.14)$$

また (6.13) 式より、利得 G は次のようになります。

$$\begin{aligned} G &= \frac{x_o}{x_i} \\ &= \frac{G_3 + k(G_1 G_4 + G_2 G_3)}{1 + kG_2} \end{aligned} \quad (6.15)$$

この式は、次のように変形することが出来ます。

$$G = G_\infty \frac{T}{1 + T} + G_0 \frac{1}{1 + T} \quad (6.16)$$

ただし

$$G_\infty = G_3 + \frac{G_1 G_4}{G_2} \quad (6.17)$$

$$G_0 = G_3 \quad (6.18)$$

*1 電源を殺すとは、電気回路での用語として電流源の場合は開放、電圧源の場合は短絡することです。

(6.16) 式より、次のことが分かります。

$$G|_{T \rightarrow \infty} = G|_{k \rightarrow \infty} = G_{\infty} \quad (6.19)$$

$$G|_{T \rightarrow 0} = G|_{k \rightarrow 0} = G_0 \quad (6.20)$$

よって G_{∞} は、ループ利得を無限大にしたときの回路全体の利得、 G_0 はループ利得をゼロにしたときの回路全体の利得となります。これらの関係は帰還回路の解析に利用することが出来ます。ループ利得 T を無限大またはゼロとすることは、(6.14) 式より k の値を無限大またはゼロとすることに対応しますので、注目する従属電源の伝達特性を無限大またはゼロとすることと同じです。この条件を適用しますと、全体の利得が簡単に得られることになります。このとき (6.14) 式のループ利得 T を決める必要が出てきますが、これは (6.11) 式より $x_i = 0$ つまり入力信号を殺し、 $x_2 = 1$ つまり従属電源の出力を 1 とし、従属電源の入力の値 x_1 を求めることによって得られます。

ループ利得 T が無限大の場合を考えてみます。このとき (6.11) 式と (6.14) 式とから

$$x_1 = \frac{G_1}{1+kG_2} x_i = \frac{G_1}{1+T} x_i$$

と与えられますので、 $x_1 \rightarrow 0$ となります。これは従属電源の入力がゼロとなることを示していますので、 G_{∞} を計算するときこの条件を使うことによって、簡単に求めることが出来るようになります。

T がゼロの場合には、特に述べるようなその他の特徴はありませんが、従属電源の出力がゼロという条件は、強力な計算簡単化の武器となります。

以上をまとめますと帰還回路の利得は、次のステップによって得られます。

1. G_{∞} を求める

従属電源入力側の信号レベルをゼロであるとし、この条件を入力側へ適用しますと、入力側が非常に簡単になってきます。出力側は、どのような値になるか分かりませんので、順次求めていく必要があります。この状態で回路の利得を求めますと、 G_{∞} となります。

2. G_0 を求める

電流源出力側の信号レベルがゼロであるとします。これはその後の回路に信号が生じないことを示しています。つまり回路の出力信号は、入力信号による別の経路によって生じる信号によって決められることになります。この状態で回路の利得を求めますと、 G_0 が求められることになります。

3. T を求める

入力信号レベルをゼロとし、注目する従属電源の出力信号を 1 とし、その従属電源の入力レベルを求めます。これによって G_2 が求まります。

4. k を求める

この値は、従属電源の伝達特性ですので、通常回路のバイアスが与えられていれば簡単に計算することができます。

5. 全体の利得を求める

(6.14)(6.16) 式を用いて、回路全体の利得を求めます。

6.2.2 四端子網を用いた表現

ここでは四端子網を用いて帰還回路の特性について検討を行います。帰還回路の場合には、接続の仕方によって直列、並列という言葉を用いる代りに、次に示すような言葉が用いられることがあります。そしてこれらの言葉で四端子網の帰還回路を取り扱う場合、そこで用いる際に便利なパラメータがあり、次の表に与えておきます。ここで便利であるといっていますが、この便利であるというのは、これらのパラメータを用いることによって得られる式が非常に簡潔な形となることをさしています。つまり別のパラメータを用いると、複雑な式となってしまいます。

帰還方式	接続方式	便利なパラメータ
伝達インピーダンス帰還	直列一直列帰還	Zパラメータ
電圧比帰還	直列一並列帰還	Hパラメータ
伝達アドミタンス帰還	並列一並列帰還	Yパラメータ
電流比帰還	並列一直列帰還	Gパラメータ

表 6.1 帰還回路

表 6.1 に対する帰還回路ブロックは、次の図 6.4 によって与えられます。この様な接続形式の回路があった場合には、この図に示してありますパラメータを用いることによって簡単な式を得ることが出来るようになります。

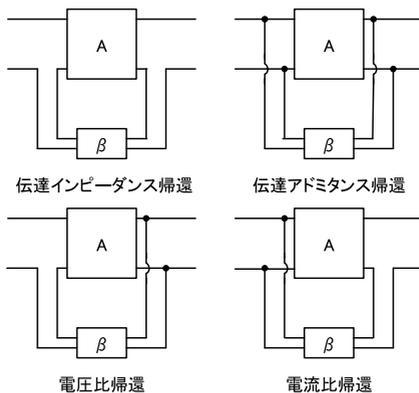


図 6.4 各種帰還回路ブロック

またブロック図 6.4 に対する等価回路として、図 6.5 が与えられます。

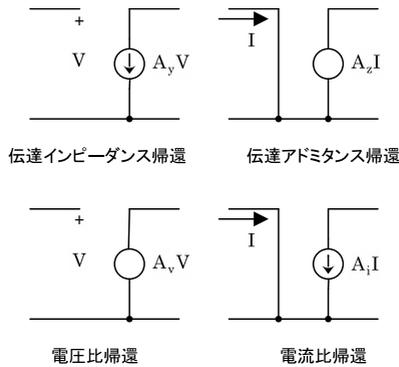


図 6.5 近似等価回路

この等価回路図 6.5 は、帰還回路を含んでいませんので、回路計算が非常に簡単になります。これらの等価回路を求めるためには、表 6.1 に示されたパラメータを用いて計算することが出来ます。

6.3 帰還回路インピーダンス

この節では帰還回路のインピーダンスについて考えます。まず始めに帰還回路のインピーダンスの計算に便利な Blackman の公式の説明を行い、次にその応用として四端子網を考えます。

6.3.1 Blackman のインピーダンス公式

この公式を導くに当たって、帰還回路の中の従属電源に注目します。その関係式は (6.10) 式として与えられます。また別のパラメータとして、回路全体の入力側の電圧 V_i と電流 I_i を考えます。入力電流と従属電源の出力を独立変数とし、従属電源の入力と回路全体の入力電圧を従属変数としますと、

次の式が得られます。

$$x_1 = A_1 I_i + A_2 x_2 \quad (6.21)$$

$$V_i = A_3 I_i + A_4 x_2 \quad (6.22)$$

ここで次の定義を導入します。

Z_i : 帰還回路が動作しているときの回路の入力インピーダンス

Z_i^0 : $x_2 = 0$ のときの回路の入力インピーダンス

T_O : 回路の入力が開放されたときのループ利得

T_S : 回路の入力が短絡されたときのループ利得

T_O を求めます。このとき以前述べたループ利得を求める手法を用います。回路の入力は開放状態ですので、 $I_i = 0$ です。また T_O は $x_2 = -k$ としたときの $-x_1$ で表されますので、(6.21) 式より次のように求められます。

$$T_O = -x_1 = A_2 k \quad (6.23)$$

同様に T_S の場合、入力が短絡ですので、(6.21)(6.22) 式は

$$x_1 = A_1 I_i - A_2 k \quad (6.24)$$

$$0 = A_3 I_i - A_4 k \quad (6.25)$$

これらの式から I_i を消去しますと

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \frac{kA_4}{A_3} - kA_2 \\ &= k \left(\frac{A_1 A_4}{A_3} - A_2 \right) \end{aligned} \quad (6.26)$$

よって回路全体の入力が短絡されたときのループ利得は、次の式で与えられます。

$$T_S = k \left(A_2 - \frac{A_1 A_4}{A_3} \right) \quad (6.27)$$

最後に入力インピーダンスを求めます。(6.10) 式を (6.21) (6.22) 式へ代入して、次の式が得られます。

$$x_1 = A_1 I_i - A_2 k x_1 \quad (6.28)$$

$$V_1 = A_3 I_i - A_4 k x_1 \quad (6.29)$$

この二つの式から x_1 を消去しますと、次のようになります。

$$\begin{aligned} Z_i &= \frac{V_i}{I_i} \\ &= A_3 - \frac{k A_1 A_4}{1 + k A_2} \\ &= A_3 \frac{1 + k \left[A_2 - \frac{A_1 A_4}{A_3} \right]}{1 + k A_2} \end{aligned}$$

上で求めた T_O , T_S の式を用いますと

$$Z_i = A_3 \frac{1 + T_S}{1 + T_O} \quad (6.30)$$

が得られます。これが **Blackman** のインピーダンス公式です。

この公式の中で A_3 を計算する必要がありますが、(6.21) 式から A_3 の値は $x_2 = 0$ つまり $k = 0$ のときの入力インピーダンスということが分かります。また T_S , T_O も先に述べましたループ利得を求める手法を用いることにより、比較的簡単に求めることが出来ます。

この公式は入力インピーダンスとして計算しましたが、式を導く過程において回路の出力を逆に入力とみなして考えることも可能です。よって公式では入力としましたが、出力インピーダンスも同様な式で扱うことが出来ます。

6.4 ループ利得の測定

単一帰還回路を考えたとき、全ての帰還回路は、次の図のように一般的に表現することが出来ます。

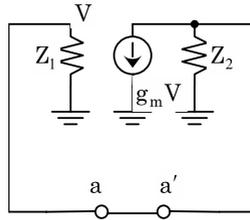


図 6.6 の中の $a-a'$ は帰還回路の一部を示しているだけで、特別な意味はありません。この図からループ利得は、次のようになります。

$$T = g_m \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (6.31)$$

次に $a-a'$ でループを切り離し、 a' 端に値 Z_1 のインピーダンスを接続し、 a 端に電圧源を接続しますと次の図 6.7 が得られます。

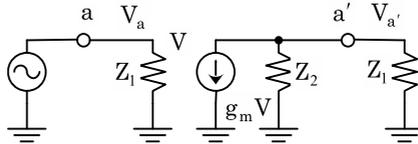


図 6.7 利得を求めるための図

この図より

$$\frac{V_{a'}}{V_a} = -g_m \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (6.32)$$

(6.31)(6.32) 式より

$$T = -\frac{V_{a'}}{V_a} \quad (6.33)$$

次の定義を導入します。

$$T_O = g_m Z_2 \quad (6.34)$$

この値は Z_1 が大きな値を持つ場合ですから、 a' 端を開放したときの電圧利得を示しています。(6.32)(6.33)(6.34) 式より

$$\frac{T_O}{T} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \quad (6.35)$$

が成立します。

次に $a-a'$ を切断し、今度は a 端に電流源を接続します。

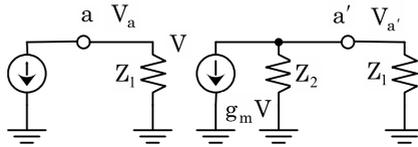


図 6.8 電流源の場合

この図より、電流利得を求めますと

$$\frac{I_{a'}}{I_a} = -g_m \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (6.36)$$

電圧利得の場合と同様に、(6.31) 式と (6.36) 式から、次の式が得られます。

$$T = -\frac{I_{a'}}{I_a} \quad (6.37)$$

次の定義を導入します。この式は、 Z_1 が Z_2 に比べて小さい場合に相当します。

$$T_S = g_m Z_1 \quad (6.38)$$

入力側の電流源の値を I としますと、 $V = Z_1 I$ となります。このときトランジスタの従属電流源の電流値は、 $g_m Z_1 I$ となりますが a' を短絡しておき

ますとトランジスタから流れ出す電流となります。この場合の電流利得は、 I で割ることによって得られます。つまりこの値は a' を短絡したときの電流利得を示しています。

(6.36)(6.37)(6.38) 式より

$$\frac{T_S}{T} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} \quad (6.39)$$

が成立します。

(6.35)(6.39) 式より、次の式が成立することが分かります。

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_O} + \frac{1}{T_S} \quad (6.40)$$

(6.40) 式から、帰還回路のループ利得を求めるには

1. 帰還回路の一部 $a-a'$ を切断して a' 端を開放状態とし、もう一方の a 端子に電圧源 V_i を接続し、開放した端子の電圧を求め $T_O = V_{a'}/V_i$ を求めます。
2. 次に同じ切断点に対し a' 端を接地し、 a 端子に電流源を接続し、接地した端の電流を求め $T_S = I_a/I_i$ を求めます。
3. (6.40) 式より T を求めると、これがループ利得となります。

以上の説明において、交流信号に対しても同様に扱うことが出来ることは明らかでしょう。ただし交流の場合、直流成分を分離して考える必要があることは言うまでもありません。

特別な例 (1)

Z_1 と Z_2 の大きさはなかなか判然としないのが常ですが、もしあらかじめ分かっている場合には、さらに簡単に開放ループ利得を求めることが出来ます。図 6.6 より、開放ループ利得は次の式によって与えられます。

$$T = g_m Z_2 = T_O$$

よって開放ループ利得は a' 端を開放し、 a 端に電圧源を接続したときの電圧利得によって得られます。これは a 端の電圧源に単位電圧源を用いるとより簡単に得られることとなります。

特別な例（2）

前の例題と同様に短絡ループ利得は、次のように与えられます。

$$T = g_m Z_1 = T_S$$

この場合 a' 端を接地し、 a 端に電流源を接続したときの電流利得によって得られます。この場合も電流源に対して単位電流源を用いると簡単になります。

6.5 ナイキスト判定法とボード線図

この節ではナイキスト判定法とボード線図の関係について考えることにします。改めて帰還回路のブロック図を示しますと、次の図 6.9 のようになります。

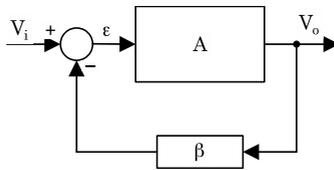


図 6.9 帰還ブロック

ただしここでは増幅器 A は安定であると仮定します。

今までの議論から $1 + A\beta$ の安定不安定によって回路全体の安定性が判別できますので、 $1 + A\beta$ の式を基本に考えます。ボード線図において増幅器 $A\beta$ は多くの場合において、次の図 6.10 のように示すことができます。

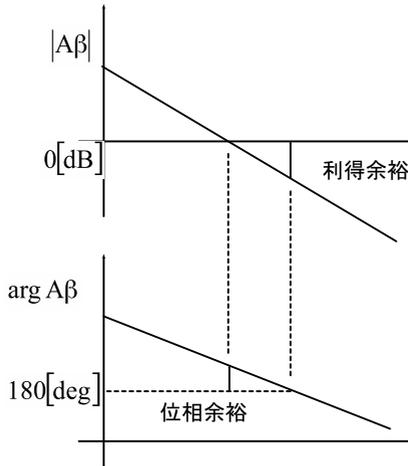


図 6.10 増幅器のボード線図

伝達関数などを複素平面に描いた場合、この複素平面をナイキスト平面と呼んでいます。またそこに描かれた線図をナイキスト線図と呼んでいます。

利得余裕 T_m は、位相が 180[deg] の点でのループ利得の大きさを利得余裕と定義しています。 180[deg] となる点から単位円つまり $|A\beta| = 1$ と交差する点までの位相が位相余裕 ϕ_m となります。

以上の余裕を、ナイキスト線図 6.11 に示しておきます。

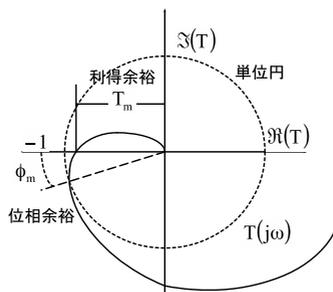


図 6.11 ナイキスト線図

ナイキスト線図において、利得を表す曲線が $-1 + j0$ の点を囲むかどうかを見ることによって回路が安定であるかどうかを判定することが可能です。これは $1 + \beta A$ の値がゼロとなると伝達関数が無限大となることを利用しています。この証明などにつきましては、実際の回路設計には必要がないこと、制御に関する著書には必ず説明がありますので、そちらの本をご覧ください。[41]

第 7 章

演算増幅器

電子回路において増幅器は、基本的な電子回路と考えられています。その中で演算増幅器は、理想的でありかつ基本的な回路として昔から研究が行われ、今も研究が続けられています。

演算増幅器 (Operational Amplifier:OP AMP) は、昔アナログ計算機の要素部品として用いられていました。現在では、デジタル計算機にその地位を奪われてしまいましたが、今でも演算増幅器は電子回路の重要な部品として使われ続けています。単に増幅器と呼ばずに演算増幅器という名称が使われているのは、演算増幅器の外部に様々な回路部品を付加することによって、様々な数学演算を行うことが出来るためです。

この章ではまず最初に理想演算増幅器について述べ、次により実際に近い演算増幅器について述べることにします。

更に詳しく色々な演算増幅器の応用などについて学びたい方は、次の資料などをご覧ください。[25] [26]

7.1 理想演算増幅器

理想的な演算増幅器としては、次のような条件が成立しなければなりません。しかし現実の増幅器は当然これらの条件を満足することは有り得ず、こ

の条件に近い増幅器を用いることとなります。よって理想の条件からずれる分だけ誤差として色々な現象として現れてくることとなります。

1. 利得が無限大
2. 入力インピーダンスが無限大
3. 出力インピーダンスがゼロ
4. オフセット電圧はゼロ
5. 温度依存性が無い

また演算増幅器は、次の図 7.1 に示すブロックによって表現されています。

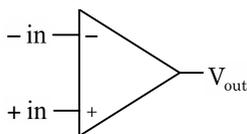


図 7.1 演算増幅器ブロック図

このブロック図の中で、プラス記号とマイナス記号が用いられています。プラスのほうの端子は、この端子の電圧がマイナスのほうの端子に対して電圧が高いときには、出力の電圧が上昇することを意味しています。

7.2 演算増幅器の特徴

上に述べたような条件が成立する場合に現れる、演算増幅器の特徴について述べておきます。そのために次の図 7.2 に示すような抵抗だけで構成された回路を考えてみます。

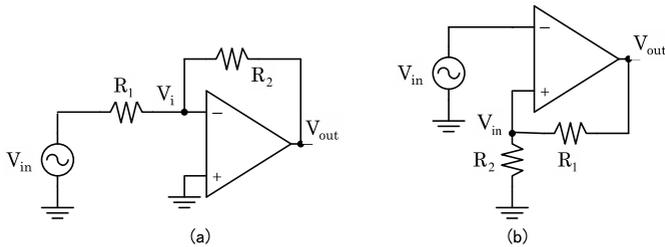


図 7.2 抵抗付加による演算増幅器

この回路図 7.2(a) において、信号入力端子がほんのわずかでも接地電圧からずれると、利得が大きいためその影響が出力側に現れます。その出力は、帰還に使っている抵抗 R_2 を経由して入力側に戻ってきます。この戻ってきた電圧は、入力側の電圧を元の接地電圧と同じになる方向へと働きますので、結局入力側の電圧は接地電圧と同じになってしまいます。この様に入力が接地電圧と同じ値となりますので、この入力端子のことを仮想接地と呼んでいます。この仮想接地は、入力側に別の何かが接続され、何らかの電圧が加わっている場合にも成立します。このときには二つの入力端子の間の電位差は常にゼロとなると言った方が分かり易いでしょう。

また入力インピーダンスが無限大ですので、演算増幅器内部に流れ込む電流は存在しません。以上のことからこれらの回路の場合 $V_i = 0$ となり、次の式が成立しなければなりません。

$$\frac{V_{in} - 0}{R_1} + \frac{V_{out} - 0}{R_2} = 0$$

この結果、次の出力式が得られます。

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (7.1)$$

回路図 7.2(b) の場合に成立する式としては、 $V_i = V_{in}$ ですので次のように

なります。

$$\frac{V_{out} - V_{in}}{R_2} + \frac{-V_{in}}{R_1} = 0$$

この結果、次の式が得られます。

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \quad (7.2)$$

(7.1) 式と (7.2) 式とを比較してみますと、(7.1) 式の方は、符号が入れ替わっています。これは入力が反転して、出力に現れていることを示しています。それに対して (7.2) 式の場合には、入力と同じ位相で出力されています。この二つの回路は、安定に動作を行い、二つの回路は共に良く用いられています。

これらの結果の式を見ていただくと分かりますように、演算増幅器の内部の回路素子の影響は全く出ていません。この性質からも演算増幅器の大きな特徴が現れています。つまり外部の素子による影響のみが回路全体の性質を表しているのです。

これらの条件を満足する増幅器を用いることによって、様々な機能を持った演算増幅器を構成することが出来ます。これらの条件に従って、色々な回路が考案されていますが、そのうち代表的な回路図と動作説明を、次に示しておきます。

7.3 加算器

二つの入力による加算器の例を、次の図 7.3 に示しておきます。

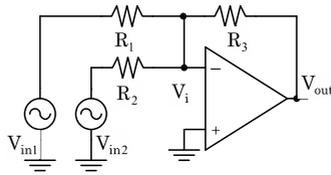


図 7.3 加算器

この回路において成立する式として、次の式が得られます。

$$\frac{V_{in1}}{R_1} + \frac{V_{in2}}{R_2} + \frac{V_{out}}{R_3} = 0$$

この結果、次の式が得られます。

$$V_{out} = - \left(\frac{R_3}{R_1} V_{in1} + \frac{R_3}{R_2} V_{in2} \right) \quad (7.3)$$

この結果において、 $R_1 = R_2 = R_3$ とすれば、 $V_{out} = -(V_{in1} + V_{in2})$ となりますので、出力は、二つの入力を加え合わせて反転させた信号となります。抵抗の値として様々な値を選ぶことによって、二つの信号の重み付けをした加算器を実現することが出来ます。

また入力端子の数を増加すれば、多くの変数に対する加算を実現することが出来ることは、説明する必要はないでしょう。

7.4 積分器

積分器は、次のような回路図 7.4 で実現することが出来ます。

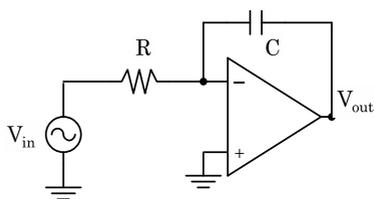


図 7.4 積分器

この回路の回路方程式は、次の式のように与えられます。

$$\frac{V_{in}}{R} + \frac{V_{out}}{1/sC} = 0$$

この式から、次の結果が得られます。

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{1}{sRC} \quad (7.4)$$

この式を見ますと、確かに積分されることが分かります。積分については付録 D のフーリエ変換を参照下さい。

回路の中で積分することが多いので、この回路は良く用いられています。

7.5 微分器

微分器は、次のような回路図 7.5 で実現することが出来ます。

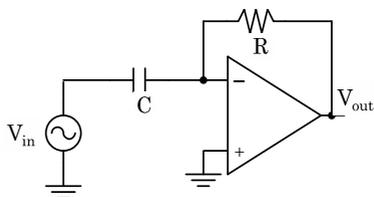


図 7.5 微分器

この場合には、積分の時と同じように式をたてて求めますと、次の結果となります。

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{sC}{R} \quad (7.5)$$

この結果から、確かに微分されていることが分かります。これについても付録 D を御覧ください。

しかしこの微分回路という動作は、雑音を強調する働きをしますので、実際に用いられることはほとんどありません。

またこの中で用いられる増幅器の研究は、いまでもって続けられています。が先に挙げたような演算増幅器の条件ではなく、別の条件の演算増幅器も考えられています。その代表的な演算増幅器としては、**Current Convoyer** などがあります。これらについては、省略します。

第 8 章

発振器

発振器とは、いったいどのようなものでしょうか。この様に問うと多くの人は必ずと言ってよいほど、信号を生じる電子装置だと答えます。確かにその通りですが、それは一つの見方に過ぎません。発振器とは何かと言うことは、厳密に考えるとそんなに簡単なものではありません。

この問に対して、次のように答えることも可能です。

- 発振器は、直流電力から交流電力への変換器
- 発振器は、帰還増幅器において、正帰還を行っている装置
- 発振器は、負のインピーダンスを持つ装置

これらの言葉は、すべて発振器の特徴を言い表しています。つまりこれらの言葉を数値で表現することによって、発振器を表す式が得られます。ただしこれらの言葉は、発振が起こり始める段階においてのみ厳密に取り扱うことができます。発振の振幅が大きくなってくると、回路の非線形性により、その振幅が制限され、それ以上大きくならずに、ある一定のところで振幅の成長は止まってしまいます。

その領域では、非線形方程式を取り扱う必要があり、問題は急速に難しくなってしまいます。しかし非線形領域に入る手前においては回路は線形な動作をします。線形な領域における発振周波数が $f_T/f \gg 100$ を満足するよ

うなら、参考文献 [5] にて述べましたように、バイポーラ・トランジスタも MOSFET も簡略モデルを使って解析することが出来ます。つまり発振器に電源を投入して飽和領域に入るまで簡単に解析することが可能ということになります。

この章では、発振器回路設計を行う場合に必要な事柄について述べていくことにします。

市販の本に書かれている発振周波数や発振可能条件については、十分に注意しなければならないことがあります。それはあくまでも回路が線形であることを用いて、求められた条件であるということです。つまり発振振幅が大きくなってくると、前提条件である線形であるということが成立しなくなります。

例えば発振が始まった時点では発振信号の中の直流電圧は、電源を投入したときに容量やインダクタンスに電荷が蓄積されていなければ、発振しないとしたときの最終の直流電圧に向かって電圧ゼロから上昇して行くと思われれます。信号が大きくなり飽和しますと発振波形が歪むため、その中に含まれている直流成分により最初予想した直流電圧よりずれることになります。このずれは共振回路の Q や能動素子の非線形の性質に依存しますので、一概には決められません。

発振によってどのような影響が出てくるかといいますと、次のような現象が生じます。

1. 発振周波数がずれてくること、通常高調波のために低域周波数へ移動します
2. 極端な場合には、定常状態で発振しない場合もあり得ます^{*1}

その結果定常状態で発振したとしても、設計目的の周波数とするための微妙な再調整が、必ず必要になります。

^{*1} 定常状態で発振しないとは、振幅が一定の値にならず変動したりする場合のことを言っています。

8.1 発振の条件

発振が始まるには、重要な自然界の現象が必要になります。多くの発振器では、その現象がないと発振が起こらないからです。それは雑音です。つまり雑音がトリガとなって、発振が開始されます。もし雑音がこの世の中に存在しないとすれば、多くの発振器は発振せずに、何の役にも立たないことになってしまうでしょう。

雑音がない場合においても発振させることは可能です。このためには発振を発生するためのトリガ回路が必要になります。このトリガ回路の詳細いことに関しましては、この章では省略します。

発振が始まるときには信号振幅が小さいので、回路は線形の領域で動作を行います。発振の始まるの状態では線形領域で動作しますので、利得が1以上あると、さらに発振に向かって振幅が大きくなります。その条件というのは、比較的簡単に求めることができます。このときに必要なのが章の始めに述べた、発振器とは何でしょうという問いに対する答えの一つです。この問に対する最初の答えは利用することが難しいのですが、後の二つはそのまま役に立ちます。このことを用いて、これから詳しく説明していくことにします。

8.1.1 正帰還

回路が正帰還であるとは、帰還回路での式において分母がゼロとなれば、たとえ入力ゼロであっても出力が現れることを示してしますので、その関係から次の式を導くことが出来ます。

$$A\beta = -1 \quad (8.1)$$

この関係式は非常に簡潔なのですが、実際に発振条件を解析するためには、少々使いづらいところがあります。その理由は、増幅器部分と帰還回路部分とを明確に分離して求めることが、多くの場合困難だからです。

そこでよく用いられる方法として、帰還回路のところで述べた Blackman の公式が用いられます。これは帰還回路においてループを一周する利得、つまり選送比 $T = \beta A$ を求めることです。この公式は、次のように与えられました。

定理 2 Blackman の公式

従属電源が含まれる回路において、制御電源の値を 1 として、回路を一周したときの利得を求め、その値にマイナスをつけた値が帰還増幅器の利得になります。

この定理を具体的に、次の回路の場合に当てはめてみましょう。

具体例

次に示す発振回路に Blackman の公式を使ってみます。

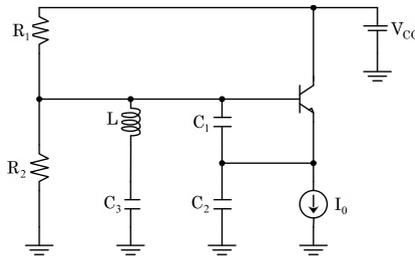


図 8.1 コルピッツ発振器

この回路はコルピッツ発振器と呼ばれている回路です。説明を簡単にするために、簡略化モデルが成立する範囲での発振器を考えてみます。またトランジスタとしては、ディスクリート素子を考えることにします。つまりコレクタ・サブストレート間容量が存在しないということです。

簡略化モデルを用いて、回路を書き直すと図 8.2 のようになります。ただしこの図の中で C_3 の値は十分に大きな値であること、電流源は理想電流源

であること。ここでは交流信号部分だけを描いています。

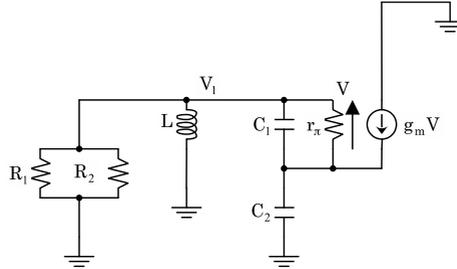


図 8.2 簡略化等価回路による表現

この回路図において $g_m V$ を $g_m \times 1$ と置き、電圧 $-V$ を求めることが目的です。図の節点の電圧を V_1 と置いて、節点方程式をたてると、次式が得られます。

$$0 = \frac{V_1}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} + \frac{V_1}{j\omega L} + j\omega C_1 V + \frac{V}{r_\pi}$$

$$0 = j\omega C_1 V + \frac{V}{r_\pi} + (j\omega C_2)(-V_1 + V) + g_m$$

この式から V_1 を消去して、 $-V$ を求めると、次の式が得られます。

$$-V = \frac{g_m}{g_\pi + j\omega(C_1 + C_2) + j\omega L C_2 \frac{g_\pi + j\omega C_1}{g_1 + g_2 + \frac{1}{j\omega L}}} \quad (8.2)$$

この式は複雑ですので、さらに簡単にするため $1/R_1 = g_1 = 0$, $1/R_2 = g_2 = 0$ の場合を考えてみます。このとき (8.2) 式は、

$$-V = \frac{g_m}{g_\pi + j\omega(C_1 + C_2) - \omega^2 C_2 (g_\pi + j\omega C_1)}$$

$$= \frac{g_m}{g_\pi (1 - \omega^2 L C_2) + j\omega(C_1 + C_2 - \omega^2 L C_1 C_2)} \quad (8.3)$$

この式の絶対値を考えると分かりますが、分母の虚数部分がゼロとなるところで V の値が極大となります。このときの周波数と、 V の値は、次のよう

に与えられます。

$$\omega^2 = \frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2} \quad (8.4)$$

この式と (8.3) 式から

$$|V| = \frac{g_m C_1}{g_\pi C_2} \quad (8.5)$$

Blackman の公式を用いしないで、回路を解析してみると分かりますが、非常に複雑な式を追っかけて行かねばなりません。Blackman の公式を用いることにより、この様に簡単に帰還回路が含まれた問題を解くことが出来るようになります。

ここで忘れてならないことは、これ等の結果は回路が線形動作をすると仮定していることです。振幅が成長するにつれ、トランジスタなどの非線形性が現れてきます。その結果振幅は、非線形によって増大することが止まり、発振周波数は、非線形によって高調波が発生する分だけエネルギーが取られるためより低いエネルギーの方向、つまり低い周波数へ移動することになります。これについては少し詳しく後ほど述べます。

8.1.2 行列式

発振が始まる時には小信号動作ですので、回路を線形な式から構成された行列式で表現することが出来ます。四端子網理論によると、回路を一般的に次の行列式で表現することが可能となります。

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

ここで

ϕ : 入力信号

Γ : 四端子パラメータ

θ : 出力信号

発振が起こるためには、何の入力が無くても出力が現れる必要がありますので、四端子パラメータとしては、次の条件が成立しなければなりません。

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad (8.7)$$

四端子パラメータは一般に複素数で表されますので、この条件は次の式として得ることが出来ます。

$$D_R - D_I = \Re\Gamma_{11}\Im\Gamma_{22} + \Re\Gamma_{22}\Im\Gamma_{11} - \Re\Gamma_{12}\Im\Gamma_{21} - \Re\Gamma_{21}\Im\Gamma_{12} = 0 \quad (8.8)$$

ここで

$$D_R = \Re\Gamma_{11}\Re\Gamma_{22} - \Re\Gamma_{12}\Re\Gamma_{21} \quad (8.9)$$

$$D_I = \Im\Gamma_{11}\Im\Gamma_{22} - \Im\Gamma_{12}\Im\Gamma_{21} \quad (8.10)$$

これらの条件式を用いることにより、様々な発振器の発振可能条件を求めることが出来ます。

この行列式を用いた発振の条件を取り扱うときに、どの四端子パラメータを使うかという問題が発生します。つまり回路の形式によっては、最適なパラメータが存在しているということです。実際問題においては、あまり使う機会は無いでしょうから、ここでは結果だけを書いておきます。

発振回路には、本体の増幅器部分と帰還回路部分に分けられるとしますと、次のような組み合わせが考えられます。実際の発振器回路では、この様にきれいな形に分解することは難しいので、適用することがなかなか難しいのが実状です。とにかくこのように分割できたとして、考えられる接続方法は図 8.3 のようになります。

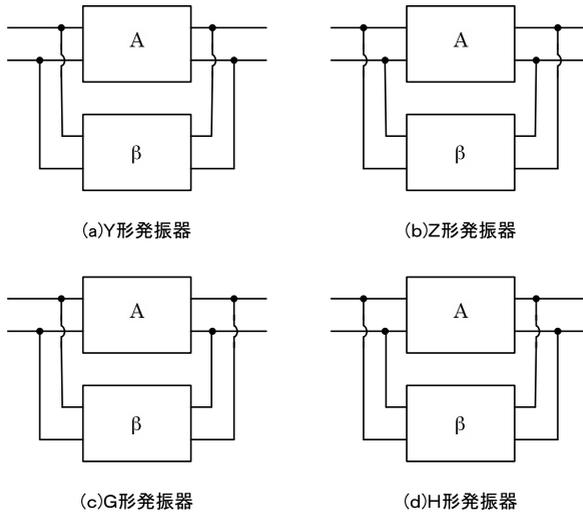


図 8.3 発振回路の組み合わせ

この図 8.3 の中に示していますように、 A は能動素子部分、 β は帰還回路を示しています。また図の下に書いてあるようにこれらのブロック図の各々に対して、表現するのに便利な四端子パラメータを示しています。四端子パラメータ自体マイクロ波の回路設計のみに使われて、現在周波数が低い回路設計には用いられませんので、これ以上具体的な詳しい話はしません。

8.1.3 負性インピーダンス

負性インピーダンスは、インピーダンスが負の値ですから、そのエネルギーは負の値を持つことになります。エネルギーの値が負であることは、その中からエネルギーが出てくることを意味しています。この出てくるエネルギーが正の値を持つ負荷回路によって消費され、お互いに同じ値となったところでエネルギーのバランスが取れることになります。つまり全体の回路を二つに分割し、片一方を正の値を持つインピーダンス部分、もう片一方を

負の値を持つインピーダンスとしたとき、それらの絶対値が等しくなるところで、発振が定常状態で継続するということになります。この考えを用いることによっても、発振条件を導くことが可能になります。

この発振に関する考え方は、発振回路に限らず非常に重要です。一般の回路において回路のある部分に負のインピーダンスが存在するならば、必ず発振するというではありませんが、その可能性があるということを意味しています。よって発振器を設計するときに用いられるばかりでなく、発振させないようにするためにも利用することが出来ます。

8.2 発振の安定性

ここで Grozkowski による発振の安定性について述べておきます。

図 8.4 に示してあります、発振器のブロック図を考えます。

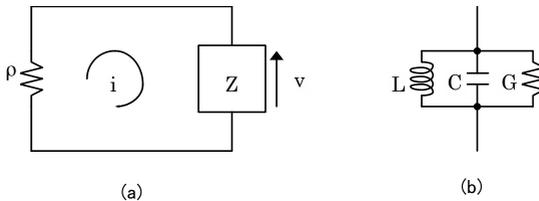


図 8.4 安定性の説明図

ρ は負性抵抗とし、 Z は図 8.4(b) に示すような同調回路を示しています。安定状態の発振回路では、発振周波数の一周期を取ったエネルギーは、先に説明しましたようにゼロでなければなりませんので、次式が成立することになります。

$$\oint i dv = 0 \quad (8.11)$$

発振波形は歪んでいますので、ここで電流 i 、電圧 v は高調波成分を含ん

でいますので、各々次のように表現することが可能です。

$$i = \sum_k^{\infty} I_k \sin(k\omega t + \alpha_k) \quad (8.12)$$

$$v = \sum_k^{\infty} V_k \sin(k\omega t + \beta_k) \quad (8.13)$$

(8.13) 式から

$$dv = \sum k\omega V_k \cos(k\omega t + \beta_k) dt \quad (8.14)$$

これらの式を (8.11) 式へ代入します。式を変形し三角関数の公式を用いますと、周波数が異なった式の掛け算となっている項の積分はゼロですので次のようになります。

$$\sum \pi k V_k I_k \sin(\alpha_k - \beta_k) = 0 \quad (8.15)$$

この式は、高調波成分の虚数部分の総和が、ゼロとなることを意味しています。ここで図 8.4(b) の同調回路に適用してみます。 k 番目の高調波に対する負荷インピーダンスは、次のように与えられます。

$$Z_k^{-1} = G + jk\omega C + \frac{1}{jk\omega L} \quad (8.16)$$

このとき k 番目の高調波に対する電流 I_k と電圧 V_k の式は、次のようになります。

$$V_k = Z_k I_k \quad (8.17)$$

この関係を用いますと (8.15) 式は、次のように変形されます。

$$0 = \sum V_k^2 \Im \left(\frac{k}{Z_k} \right) \quad (8.18)$$

$$0 = \sum I_k^2 \Im (kZ_k) \quad (8.19)$$

ここで、次のように置きます。

$$m_k = \frac{V_k}{V_1} \quad (8.20)$$

$$n_k = \frac{I_k}{I_1} \quad (8.21)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8.22)$$

これらの式を用いますと、次の結果が得られます。

$$0 = \Im \left(\frac{1}{Z_1} \right) + \sum_k \Im \left(\frac{k}{Z_k} \right) m_k^2 \quad (8.23)$$

$$0 = \Im(Z_1) + \sum_k \Im(kZ_k) n_k^2 \quad (8.24)$$

$$\Im \left(\frac{k}{Z_k} \right) = \frac{1}{\omega L} \left[\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) k^2 - 1 \right] \quad (8.25)$$

発振の高調波は基本波に関して、次のような式が成立します。

$$\omega_k \cong k\omega_0 \quad (8.26)$$

$$\left(\frac{\omega_{00}}{\omega_0} \right)^2 - 1 \cong 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \quad (8.27)$$

ただし

$$\omega_{00} - \omega_0 = \Delta\omega \quad (8.28)$$

これらの式を用いますと、(8.23)(8.24) 式は次のようになります。

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{1}{2} (3m_2^2 + 8m_3^2 + 15m_4^2 + \dots) \quad (8.29)$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{1}{2Q^2} \left(\frac{4}{3}n_2^2 + \frac{9}{8}n_3^2 + \frac{16}{15}n_4^2 + \dots \right) \quad (8.30)$$

ただし

$$Q = \frac{\omega C}{G} \quad (8.31)$$

(8.29)(8.30) 式の結果から、次のような結論が出てきます。

- 高調波が含まれていると、(8.29) 式で与えられる分だけ周波数は低下します。
- 発振周波数が変化しないようにするには、高調波成分を極力小さくする必要があります。
- (8.30) 式から、同調回路の Q を高くすることにより、周波数の変動が小さくなることが分かります。

8.3 発振器の雑音

発振器の雑音は、長い間発振自体が非線形現象であるということで、理論的な説明が遅れていました。しかし 1966 年に雑音に関する経験モデルではありますが、Leeson が雑音に関するモデル式を発表して以来急速に雑音に関する研究が進んでいます。

発振器の雑音として、大きく二つの雑音に分けられています。一つは振幅雑音、もう一つは位相雑音です。振幅雑音の方は、発振器の出力振幅がリミッタ回路などで振幅制限されることが多いため、あまり重要視されていません。この様なことから位相雑音が重要視され、近年の論文の多くは、位相雑音に関する発表が大半を占めています。

8.3.1 Leeson モデル

この雑音のモデルは、先程述べましたように、1966 年に発表されたモデルです。全く経験に基づいたモデルであり、理論的な説明は、後ほど与えられました。

このモデル式は、Leeson モデルの雑音式を $\mathcal{L}(\Delta\omega)$ と起きますと、次のように与えられています。

$$\mathcal{L}(\Delta\omega) = 10 \log \left\{ \frac{2FkT}{P_s} \left[1 + \left(\frac{\omega_0}{2Q_L\Delta\omega} \right)^2 \right] \left(1 + \frac{\omega_1/f^3}{|\Delta\omega|} \right) \right\} \quad (8.32)$$

ここで

F : 経験則によるパラメータ

k : ボルツマン定数

T : 絶対温度

P_s : 共振回路の抵抗成分による平均電力消費

ω_0 : 発振周波数

Q_L : 全ての負荷を考慮したときの共振回路の Q

$\Delta\omega$: 発振周波数からのオフセット周波数

ω_{1/f^3} : 周波数 $1/f^3$ と $1/f^2$ の間のコーナー周波数

この式は、次の図 8.5 のような漸近図となります。

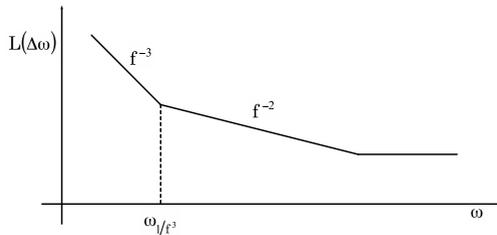


図 8.5 雑音の漸近図

この図の中で f^{-3} の項は、低周波における f^{-1} 雑音によって引き起こされる雑音、 f^{-2} 項は、低周波におけるショット雑音などによって引き起こされる雑音の影響です。この様に発振回路においては、非線形性のために低周波のところで発生している雑音が、高周波のところそのまま現れてきます。よって発振器の雑音を下げするためには、発振周波数のところでの雑音を低下させる以外に、直流に近い周波数部分での雑音を下げないと、発振器における雑音は低下することは出来ません。この辺の理論については文献 [29] を参照して下さい。

実はこの後参考文献 [34] では、負性インピーダンスを用いた発振器の厳密な解法が述べられています。発振器についての様々な問題の解が述べられていますので、興味のある方はご覧下さい。

8.4 発振器の種類

発振器には様々な種類のものがありますが、ここではアナログ回路において用いられている代表的な発振回路について示しておきます。

8.4.1 LC 発振回路

LC 発振回路には、大きく四つの回路があります。それは 陽極同調回路、ハートレー回路、格子同調回路、コルピッツ回路 の四つです。この中で一番用いられている回路は、コイルの数が少ないコルピッツ回路ですが、現実にはさらに発振の安定性を向上させるた、コルピッツ回路を改良したクラップ回路が用いられています。

陽極同調回路、ハートレー回路、格子同調回路、コルピッツ回路を次の図 8.6 に示しておきます。クラップ回路は容量が二つの場合にはコルピッツ回路と同じになりますが、大きな値の容量が能動素子の接合容量と並列に挿入することによってコルピッツに比較して能動回路の影響を低減していることが違います。

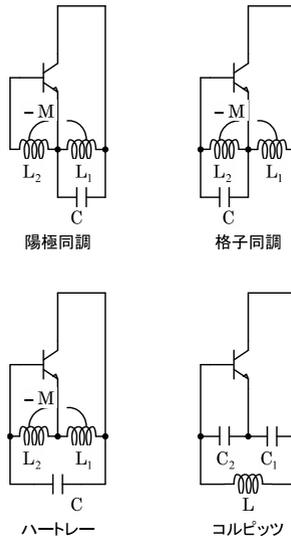


図 8.6 各種発振器

これらの回路に対して、発振周波数について次に示しておきます。発振周波数の式は先程述べましたように、非線形性の影響で実際の発振周波数とは異なりますので、単に目安であることに注意して下さい。またここで導いた式は、BJT に対する等価回路として抵抗一つと電流源一つだけを用いた簡略化モデルを用いて導かれた式であることも注意して下さい。

陽極同調

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C}} \quad (8.33)$$

格子同調

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C}} \quad (8.34)$$

ハートレー

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{C(L_1 + L_2 + 2M)}} \quad (8.35)$$

コルピッツ

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{L} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)} \quad (8.36)$$

8.4.2 移相発振回路

この発振器は、能動素子からの出力の位相を外部回路で回転させ、正帰還になるようにして元の能動素子入力へ戻すことにより発振を行う装置です。位相を回転させる方法として、CR 素子を用いる CR 発振器、能動素子だけで位相を回転させるリング・オシレータなどがあります。回路構成が非常に簡単であるため、色々な電子機器で用いられています。

CR 発振器のブロック図を次の図に示しておきます。この中で N の部分が抵抗と容量を用いて構成される位相器となります。例えば図 8.8 のような回路構成が用いられます。

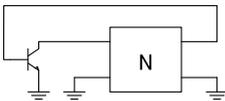


図 8.7 移相発振回路

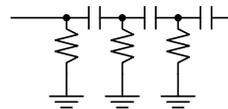


図 8.8 移相器

リング・オシレータの回路構成は、非常に簡単です。ただ単に増幅器を従属に接続し、最終出力を最初の入力に接続するだけです。ただし発振させるために増幅器の数は、通常偶数段が選ばれます。この場合の発振周波数は回路の中に含まれる CR によって決まりますので、低い周波数で発振させるためには、多数の増幅器が必要になります。

回路の中に共振回路が含まれていないときは、フリーラン周波数 と言って増幅器の中の CR のみによって発振周波数が決まってしまう。パソコンなどのクロックとして用いるために、リング・オシレータの中にセラミック共振子と呼ばれる共振子を付け加えています。セラミック共振子とは、この後述べている水晶共振子と同じ特性を持った素子ですが、セラミックを用いていることから値段が安いことが特徴です。その分だけ性能は良くはありません。パソコンの内部時計が簡単に狂ってしまうのは、このセラミック共振子を使っているからです。

8.4.3 水晶発振回路

水晶発振器といっても、LC 発振器や CR 発振器と特別な理論的違いがあるわけではありません。水晶の電気的な等価回路は、次の図のように表現することができます。つまり水晶は、電気の立場から見ると単に共振器として扱えるということだけです。ただ抵抗、コイル、容量などを用いた場合に較べると、寄生抵抗の影響が小さいこと、共振器の Q が非常に高く、その結果発振器として非常に安定度の高い発振器を簡単に作ることができます。その特徴のおかげで、水晶発振器は昔からよく用いられています。

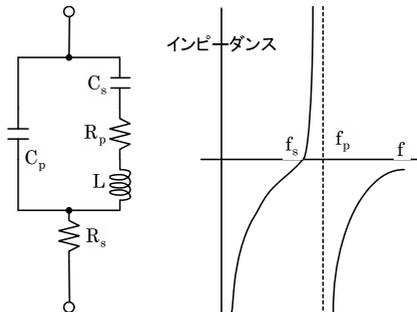


図 8.9 水晶の等価回路

インピーダンスの図に示していますように、水晶は二つの共振点を持っています。つまり並列共振点と直列共振点です。そこで回路構成としても、直列共振点を用いるかあるいは並列共振点を用いるかということによって、回路構成が異なってきます。

第 9 章

変復調器

変復調回路とは変調回路と復調回路のことをまとめて、変復調回路と呼んでいます。これらがなぜ必要かと言うことについては、次のように答えることができます。私たちが日常用いている音声や映像信号そのままでは遠く離れた場所へ信号を伝えられないために、いったん高い周波数へもちあげ、その信号を伝えた後に再び元の信号に戻してやるが必要になるためです。

元の音声や映像の信号のことをベースバンドと呼び、そのベースバンド信号を高い周波数へ変換することを変調、その高い周波数から元のベースバンド信号を取り出すことを復調と一般的には呼んでいます。

しかしデジタル信号理論が発達するにつれ、ベースバンドから単に別のベースバンドへ変換する場合においても変調という言葉が使われるようになってきました。

ここではアナログ信号の変復調回路について考えていきます。そのため低い周波数の別信号へのデジタル信号の変換については、述べていません。

9.1 変復調方式

ここで変復調方式としたのは、変調回路がそのまま復調にも使えるためです。アナログ信号における変復調方式には、三種類あります。それらの変

復調方式を考える前に、一般的に信号波形が次のように表現できることに注意しなければなりません。

ここでは余弦関数を用いていますが、正弦関数でも特に問題があるわけではありません。また単一の周波数だけで表現していますが、実際の音声信号や映像信号は、フーリエ解析から分かりますように多数の信号から構成されています。しかしそれらの信号は単一信号の合成関数ですので、単一関数の性質が分かりさえすれば一般的な性質を理解することができます。よって通常変復調回路の説明を行うときには、このように単一の周波数を用いて説明が行われます。

$$f(t) = A \cos(\omega t + \theta) \quad (9.1)$$

この信号の形を決めるには、 A 、 ω 、 θ の三つのパラメータを決めなくてはなりません。それらのパラメータをベースバンド信号で変化させることによって、変復調が行われます。どのパラメータを変化させるかということにより、次の三つの変復調方式が考えられます。

振幅変調 (Amplitude Modulation):AM 振幅 A をベースバンド信号で変復調する方式

周波数変調 (Frequency Modulation):FM 周波数 $\omega = 2\pi f$ (正確には、角速度) をベースバンド信号で変復調する方式

位相変調 (Phase Modulation):PM 位相 θ をベースバンド信号で変復調する方式

これらの変復調方式の各々について、その概略と具体的な回路について述べていくことにします。

9.1.1 振幅変調 (Amplitude Modulation:AM)

振幅変調された信号は、一般にベースバンド信号 $v(t)$ を用いて、次の様な式で表現されます。勿論実際に使われている信号は様々な信号成分を持つ

ていますので、この様な簡単な式で表現することは出来ませんが、理論的に取り扱う場合には、ベースバンド信号として単一の周波数を持った信号で表現して説明が行われています。

$$e(t) = A_0 [1 + kv(t)] \cos(\omega_c t + \phi) \quad (9.2)$$

この信号を得るための方法については、後の方で述べます。(9.2) 式を展開すると、ベースバンド信号を

$$v(t) = v_0 \cos(pt + \theta) \quad (9.3)$$

として、

$$\begin{aligned} e(t) &= A_0 [1 + m \cos(pt + \theta)] \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= A_0 \cos(\omega_c t + \phi) + \frac{A_0 m}{2} \cos[(\omega_c + p)t + \phi + \theta] \\ &\quad + \frac{A_0 m}{2} \cos[(\omega_c - p)t + \phi - \theta] \end{aligned} \quad (9.4)$$

ここで

A_0 : 振幅

m : 変調度 ($= kv_0$)

p : ベースバンド信号の周波数

θ : ベースバンド信号の位相

ω_c : 搬送波信号の周波数

ϕ : 搬送波信号の位相

この様に振幅変調された信号を展開すると、三つの周波数成分が現れます。このうち周波数 ω_c の信号を搬送波成分 (Carrier)、周波数 $\omega_c + p$ となっている項を上側波帯 (Upper Side Band : USB)、周波数 $\omega_c - p$ となっている項を下側波帯 (Lower Side Band : LSB) と呼んでいます。

また搬送波を取り除いた信号を DSB(Double Side Band)、いずれかの側波帯を取り除いた信号を SSB(Single Side Band) と呼んでいます。

振幅変調信号と、そのスペクトラムとを図9.1、図9.2に示しておきます。図9.1では、分かり易くするためにベースバンドと搬送波の周波数は、接近した形で描いてあります。

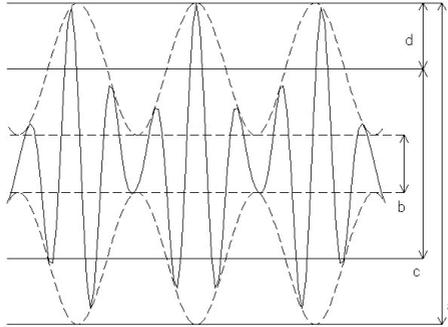


図9.1 振幅変調信号

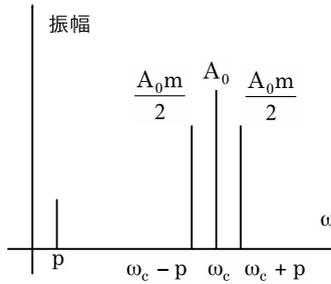


図9.2 振幅変調信号のスペクトラム

図9.1と(9.4)式から、次の関係式が成立することが分かります。

$$a = A_0(1 + m)$$

$$b = A_0(1 - m)$$

この関係式を使って導かれる次に示す式は、変調度などを計算するとき便利な式です。

$$m = \frac{a-b}{a+b} \quad (9.5)$$

$$c = A_0 m \quad (9.6)$$

$$d = \frac{A_0 m}{2} \quad (9.7)$$

さらに図 9.2 から、次のことが分かります。

- 上下側波帯は、搬送波に対して左右対称です。
- 上下側波帯と搬送波との周波数間隔は、変調信号の周波数 p に等しくなります。
- 上側波帯または下側波帯の振幅を搬送波の振幅で割り、二倍したものは変調度 m に等しくなります。

9.1.2 周波数変調 (Frequency Modulation: FM)

搬送波信号の周波数を $f_c(t)$ 、ベースバンド信号 $v(t)$ によって変化させる方式です。式で表現しますと、次のように与えられます。

$$e(t) = A_0 \cos [2\pi f(t)] \quad (9.8)$$

角周波数と位相との間には、一般的に次の式が成立します。

$$\varphi = \int_0^t \omega(t) dt \quad (9.9)$$

ここで $\omega(t) = 2\pi f(t)$ です。この式に

$$f(t) = f_c + m_f v(t) \quad (9.10)$$

を代入しますと、次のように変形することが出来ます。

$$\begin{aligned} \varphi &= 2\pi \int_0^t [f_c + m_f v(t)] dt \\ &= \omega_c(t) + 2\pi \int_0^t m_f v(t) dt \end{aligned} \quad (9.11)$$

この結果を用いて、(9.8) 式は、次のように表現することが出来ます。

$$e(t) = A_0 \cos \left[\omega_c t + 2\pi \int_0^t m_f v(t) dt \right] \quad (9.12)$$

ベースバンド信号が、(9.3) 式で表される場合、式は (9.12) 次のようになります。

$$\begin{aligned} e(t) &= A_0 \cos \left[\omega_c t + 2\pi \int_0^t m_f v_0 \cos(pt + \theta) dt \right] \\ &= A_0 \cos \left\{ \omega_c t + \frac{m_f v_0}{f_p} [\sin(pt + \theta) - \sin(\theta)] \right\} \end{aligned} \quad (9.13)$$

ただし

$$p = 2\pi f_p \quad (9.14)$$

(9.13) 式で得られた結果は、いわゆる Bessel 関数と呼ばれる関数で表現されます。この関数についての一般的に展開した表現は、次のようになります。

$$\cos(\beta \sin \omega t) = J_0(\beta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\beta) \cos(2n\omega t) \quad (9.15)$$

$$\sin(\beta \sin \omega t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\beta) \sin(2n+1)\omega t \quad (9.16)$$

ただし

$$J_n(\beta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\beta/2)^{2m+n}}{m!(m+n)!} \quad (9.17)$$

$$m! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (m-1) \times m \quad (9.18)$$

この式から分かりますように、無限個の側波帯が現れます。しかし β が小さい場合、つまり変調度が小さい場合には最初の方の項だけで信号の性質が決まります。

9.1.3 位相変調 (Phase Modulation:PM)

位相変調は、搬送波の位相をベースバンドで変調する方式ですから、周波数変調で用いたベース・バンド信号を用いて、次の式のように与えられます。

$$\begin{aligned} e(t) &= A_0 \cos[\omega_c t + m_p v(t)] \\ &= A_0 \cos[\omega_c t + m_p v_0 \cos(pt + \theta)] \end{aligned} \quad (9.19)$$

この式と周波数変調の (9.13) 式を比較してみますと、 \sin が \cos へと変わっているだけだということが分かるでしょう。この様に周波数変調と、位相変調とは本質的なところは何も違いがありません。つまり次のように言うことが出来ます。

- ベースバンドを積分して、位相変調を行うと周波数変調となります。
- ベースバンド信号を微分して、周波数変調を行うと位相変調となります。

\sin が \cos へ変化するあるいは逆の変化は、最初のベースバンドの位相をどの様に選ぶかと言うことだけですので、周波数変調と位相変調とは原理的に同じものと言うことになります。

9.2 振幅 (AM) 変調器

回路で変調を行うためには、本質的に回路が非線形で動作する必要があります。このため増幅器とは違った回路構成が必要になります。変調回路には数多くの回路が考案されていますが、ここでは良く用いられる代表的な回路についてのみ説明をしておきます。

振幅変調を行うためには、二つの信号を掛け合わせなければなりません。掛け合わせた信号を得る方法として様々な回路が考案されていますが、主な手法として、次のようなものがあります。

9.2.1 素子の非線形特性を利用する

一番良く用いられ、回路が簡単かつ超高周波まで使える素子として、ダイオードの非線形特性を利用することが行われています。ダイオードの電流・電圧特性は、指数関数で与えられますので、信号振幅が小さい場合には、次の式のように展開することが出来ます。

$$\exp\left(\frac{v}{V_T}\right) - 1 = \left(\frac{v}{V_T}\right) \exp\left(\frac{v}{V_T}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{V_T}\right)^2 \exp\left(\frac{v}{V_T}\right) + \dots \quad (9.20)$$

この式の右辺第二項を用いることによって、掛け算を行うことが出来ることとなります。この式を見て分かりますように、多くの高調波が生じてしまいます。よってこれらの高調波を取り除く回路が必要になります。

このダイオードの特性を利用するには、(9.20) 式の電圧 v として例えば

$$v = v_0 \cos(pt) + A_0 \cos(\omega_c t) \quad (9.21)$$

のように与えてやり、ダイオードの電流を出力とするような回路を構成することによって得られることとなります。

9.2.2 素子のスイッチ特性を利用する

ダイオードの特性は、ある電圧の所から急激に電流が上昇する特性となっていることが分かります。この特性は電圧が小さいところでは OFF 状態、電圧が大きいところでは ON 状態となることを示しています。つまりダイオードは、スイッチとして使えるということです。この性質を利用することによっても、変復調が可能となります。

この特性を利用した回路として、有名な回路を二つ掲載しておきます。

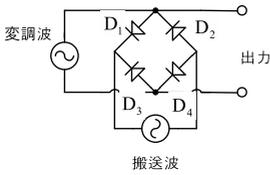


図 9.3 Cowan 変調器

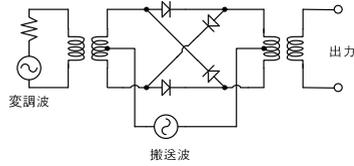


図 9.4 Ring 変調器

Cowan 変調器、Ring 変調器は、共に搬送波抑圧変調器 (Double Side Band Modulation:DSB) となっていて、搬送波がない出力が得られます。搬送波が存在しないので、受信側では何らかの形で搬送波を再現して元の信号を復元する必要があります。回路の動作については、ダイオードが ON あるいは OFF となると考えることによって簡単に求められますので、各自確認してみてください。

以上述べてきました変調回路は、トランジスタを用いても実現することが可能です。その回路の代表的な回路で今でもあらゆるところで用いられています平行変調器を、次の図 9.5 に示しておきます。この図に示す回路は別名ダブルバランス回路あるいは考案者の名前を取って、ギルバート・セルとも呼ばれています。

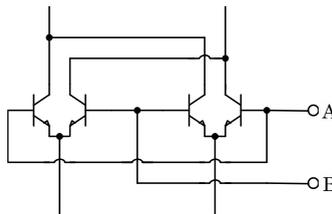


図 9.5 平行変調器

このダブルバランス回路は、次のような工夫をすると、任意の変調度を持った振幅変調回路として実現することが出来ます。変調度の変化はこの回

路図 9.6 において、下の段にある差動増幅器のベース直流電圧を傾けることにより得られます。

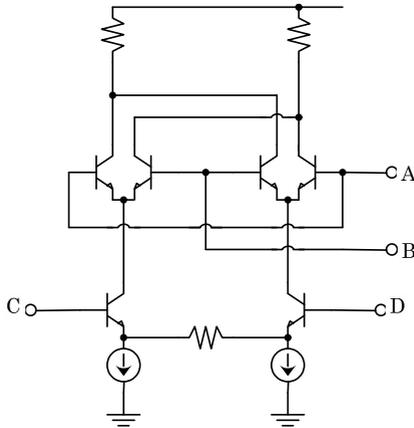


図 9.6 振幅変調器

9.2.3 二つの信号の位相変化を用いる

この方法は、次のブロック図 9.7 に示すように、位相を 90 [度] ずらした信号を用いて変調を行う方法です。位相を 90 [度] ずらすことはなかなか難しいのですが、実際の回路において良く用いられています。

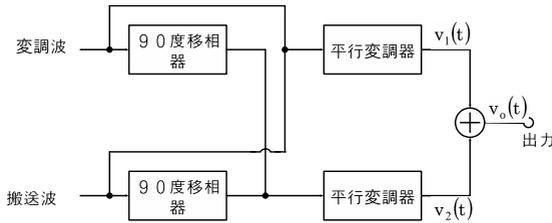


図 9.7 位相を位相を 90 [度] ずらす変調器

二つの入力信号を

$$v_{in1} = v_0 \cos(pt) \quad (9.22)$$

$$v_{in2} = A_0 \cos(\omega_c t) \quad (9.23)$$

としますと、ブロック図から次の式が得られます。

$$\begin{aligned} v_o &= v_0 A_0 \cos(pt) \cos(\omega_c t) + v_0 A_0 \sin(pt) \sin(\omega_c t) \\ &= v_0 A_0 \cos[(\omega_c - p)t] \end{aligned} \quad (9.24)$$

この式から分かりますように、得られる信号は片側側波信号 (SSB) となります。

9.3 周波数 (FM) 変調器

周波数変調方式としまして、次の二つの方式が考案されています。

9.3.1 リアクタンス管を用いる

この方法は、リアクタンスを信号によって変化させ、そのリアクタンスを発振器の周波数を決定するための同調回路の一部として用いる方法です。リアクタンス管として、次の図 9.8 に示すような回路が用いられています。

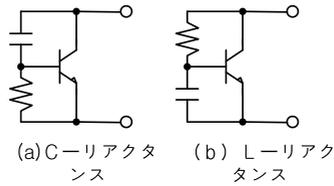


図 9.8 リアクタンス管

9.3.2 積分後に位相変調をする

この方式の一つである Armstrong 方式を、次のブロック図 9.9 に示しておきます。

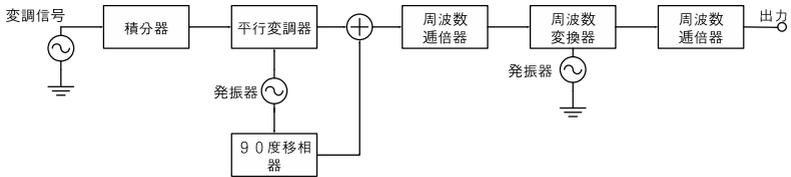


図 9.9 Armstrong 変調器

次に示す回路図 9.10(a) はブリッジを用いた変調回路ですが、いわゆるリアクタンス管を用いた応用回路です。

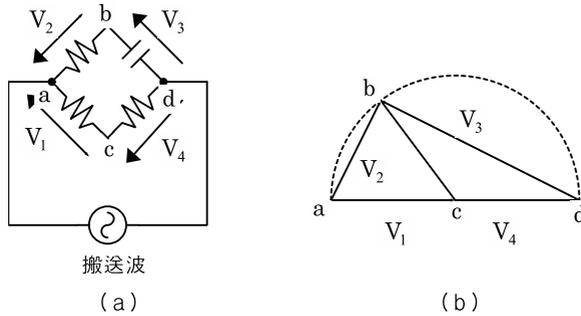


図 9.10 ブリッジ回路による位相変調

ここで acd の間の抵抗を各々 r 、 ab 間の抵抗を R 、 bd 間の容量値を C とします。すると電圧 V_1 と V_4 は同じベクトル直線状に存在します。線圧 V_2 と伝達 V_3 は常に位相が $\pi/2t$ となります。三角形 abd は直角三角形となりますので、三角形 abd は ad を直径とし b 点は円の周囲を移動することになります。角度 bcd は二等辺三角形となり、角度 bcd の大きさを θ としますと角度 bac は $\theta/2$ となります。そうすると三角形 abd から、次の式が得られます。

$$\tan \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{\omega CR} \tag{9.25}$$

よって ad 間に搬送波を入れ、容量 C または R を変調信号によって変化させますと、 bc 間に位相変調波が得られます。

9.3.3 注意事項

周波数変調方式は、周波数を変化させて信号を伝える方式ですので、この方式特有の問題が発生します。つまり証明は省略しますが、雑音電力が周波数によって変化し、次の式によって与えられることが分かっています。

$$W_n^2 = \frac{2K\omega_n^2}{A_0^2} \tag{9.26}$$

この式によると、周波数が高いほど雑音電力が大きくなります。そのため周波数変調方式では、雑音の影響を少なくするために、変調を掛ける前に周波数の高い部分の信号の大きさを大きくしておき、受信して復調するときに大きくした信号を同じ程度、今度は逆向きに減衰するということが行われます。

最初に高い周波数部分を大きくすることを Pre-Emphasis、後で高い周波数部分を減衰させることを De-Emphasis と呼んでいます。

9.4 振幅 (AM) 復調器

復調とは、変調された信号から元のベースバンド信号を取り出すことです。これを実現する回路も非常に多くの回路が考案されていますが、ここでは代表的な回路についてのみ掲載しておきます。

振幅復調の方式にも様々な方法が考案されています。主な復調方式としましては、次のようなものがあります。

9.4.1 掛け算を利用する

入力される信号に搬送波を掛けることによって、元のベースバンド信号を得ることが出来ます。入力信号として、(9.4) 式を使いますと、簡単に説明するため位相はゼロとして、

$$\begin{aligned}
 e(t)^2 &= A_0^2 [1 + m \cos(pt)] \cos(\omega_c t) \times \cos(\omega_c t) \\
 &= A_0^2 [\cos^2(\omega_c t) + m \cos(pt) \cos^2(\omega_c t)] \\
 &= A_0^2 [1 + m \cos(pt)] + \frac{1}{2} [1 + 2 \cos(2\omega_c t)] \quad (9.27)
 \end{aligned}$$

最後の括弧の第一項目から、元の信号が得られることが分かります。この様に振幅変調された信号に搬送波を掛けることにより、元の信号が得られます。よって信号の送り側としては、ベースバンド信号以外にも搬送波の情報を送っておく必要があります。

次に示す回路は、送られてきた信号から搬送波を抜き出し、その搬送波と元の振幅変調波とを掛け合わせる回路です。この回路のことを、同期検波回路と呼んでいます。

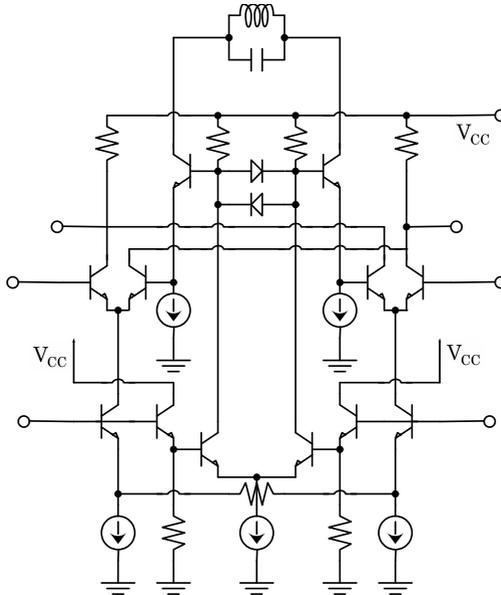


図 9.11 同期検波回路

9.4.2 包絡線を利用する

振幅変調回路は、図 9.1 のように与えられます。この信号波形を良く見ると、包絡線は元の信号を表現していることが分かります。つまり変調された信号から包絡線を取り出すことが出来れば、復調された信号が得られることが分かります。

ダイオードの特性は、先ほど述べたように、ON と OFF との二つの状態を取るスイッチと見なすことが出来ますので、変調された信号の中心から上ま

たは下片側の波形を取り出すことが出来ます。取り出された信号には高周波成分も含まれていますので、フィルタで不要な信号を取り除くことによって元のベースバンドが得られます。

9.5 周波数 (FM) 復調器

周波数復調回路にも様々な復調回路が考案されています。主な分類としては、次のようなものがあります。

- 同調回路を用いる。
- デジタル処理で復調する。
- 位相を変化させて復調する。

次に具体的な周波数復調回路について示しておきます。

9.5.1 Foster-Seeley 回路

この回路は、同調回路の周波数特性を利用して周波数復調を行う方法です。同調回路の振幅周波数特性は、次の図 9.12 のようになっていますので、周波数が違えば出力電圧も異なってきます。この性質を利用すれば、送られてきた周波数の値に応じて、異なった大きさの出力が得られることとなります。

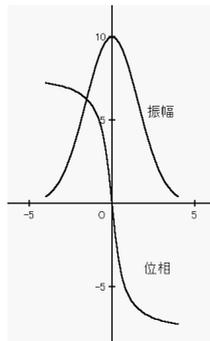


図 9.12 同調回路特性

この同調回路の特性を二つ用いて実現した回路を、図 9.13 に示しています。FM復調回路です。

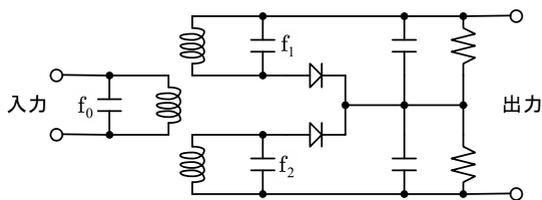


図 9.13 FM復調回路

またこの回路のトランス二次側での周波数特性は、次の図 9.14 のようになっています。

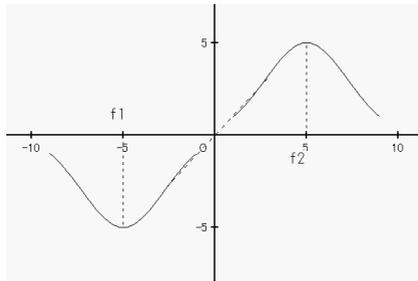


図 9.14 周波数特性

このような特性を利用して考案された回路が、Foster-Seeley 回路です。周波数に対して出力電圧が直線的に変化します。この回路の場合入力信号振幅に対しては、出力電圧が変化するので、この回路の前にリミッタを付け加えて入力信号振幅を一定に押さえておく必要があります。

この回路の回路図 9.15 を、次に示しておきます。

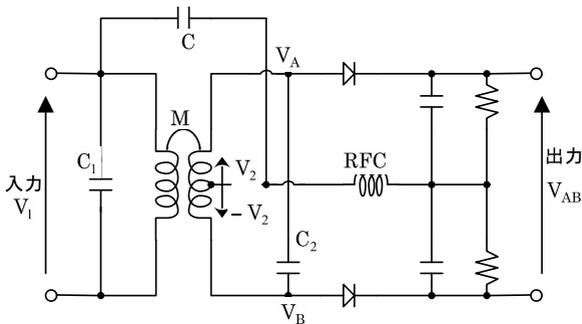


図 9.15 Foster-Seeley 回路

この回路の動作を簡単に説明しておきます。まず始めに出力レベルは、十分に入力信号の周波数に対して平坦であるとします。このとき、次の式が成

立します。

$$V_A = V_1 + V_2 \tag{9.28}$$

$$V_B = V_1 - V_2 \tag{9.29}$$

同調回路は、周波数に対して平坦であると仮定しましたが、位相は周波数に対して敏感ですので、周波数が少しでも変位すると V_2 の位相は大きく変動します。その動きを、次の図 9.16 に示しておきます。

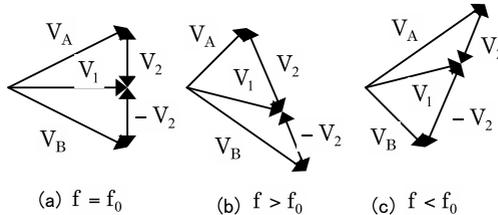


図 9.16 位相の変位

この図のように、周波数によって変位を受けた電圧は、ダイオードによって各々振幅復調され、その復調された信号の差が出力として、次式のように与えられます。

$$V_{AB} = V_A - V_B \tag{9.30}$$

9.5.2 Seeley-Avins 回路、比検波回路 (Ratio Determinator)

この回路は、Foster-Seeley 回路を改良した回路です。この回路の主な特徴は、Foster-Seeley 回路のダイオードの接続方向を変えていることです。

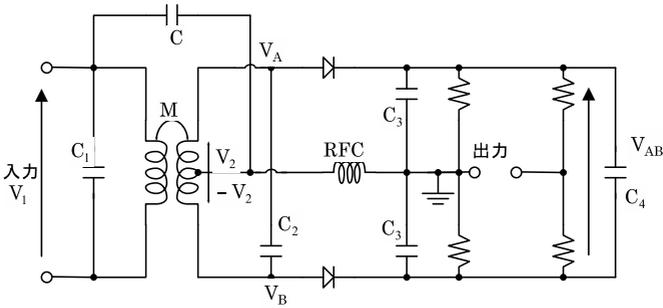


図 9.17 Seeley-Avins 回路

出力電圧 V_o は、次式によって表されます。

$$\begin{aligned} V_o &= V_A - \frac{V_{AB}}{2} \\ &= \frac{V_A - V_B}{2} \end{aligned} \quad (9.31)$$

ただし

$$V_{AB} = V_A + V_B$$

この回路で重要なことは、 V_{AB} が V_A と V_B との和になっていますので、周波数が変化して V_A が大きくなり、 V_B が小さくなくても V_{AB} は一定で動かないことです。また通常 C_4 の値は大きく取っているため、急激な電圧変動に対しても V_{AB} の変化は少なくなります。

9.5.3 パルス・カウント方式

この復調方式は、周波数変調が粗密波であることを利用しています。つまり時間軸を横切るタイミングがベースバンド信号によって決められていることを利用します。方法としては、信号が時間軸を横切るときにパルスが発生すると、そのパルスの数はベースバンド信号に一对一に対応しています。出てきたパルスの数によってベースバンドが復調されたこととなります。

このパルス・カウント方式のブロック図を、次の図 9.18 に示しておきます。

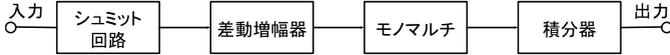


図 9.18 パルスカウント方式

9.5.4 位相変化を利用

この方式は信号の位相をずらし、元の信号と掛け合わせることによって復調する方式です。元の信号を

$$e(t) = A_0 \cos[\omega_c t + m_p v(t)] \quad (9.32)$$

としますと、この信号から搬送波を抜き出し位相を 90 [度] ずらした信号は、次のようになります。

$$e_1(t) = A_1 \cos\left(\omega_c t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (9.33)$$

(9.32) 式と (9.33) 式とを掛け合わせますと

$$\begin{aligned} e_o &= e(t) \times e_1(t) \\ &= -A_0 A_1 \sin(\omega_c t) \cos[\omega_c t + m_p v(t)] \\ &= -\{\sin[2\omega_c t + m_p v(t)] - \sin[m_p v(t)]\} \end{aligned} \quad (9.34)$$

この (9.34) 式から $2\omega_c t$ の項を取り除き $\sin(x) \cong x$ と近似すると

$$\begin{aligned} v_o &= A_0 A_1 \sin[m_p v(t)] \\ &\cong A_0 A_1 m_p v(t) \end{aligned} \quad (9.35)$$

となり、ベースバンド信号が得られます。この式を実現するための回路例を、次の図 9.19 に示しておきます。

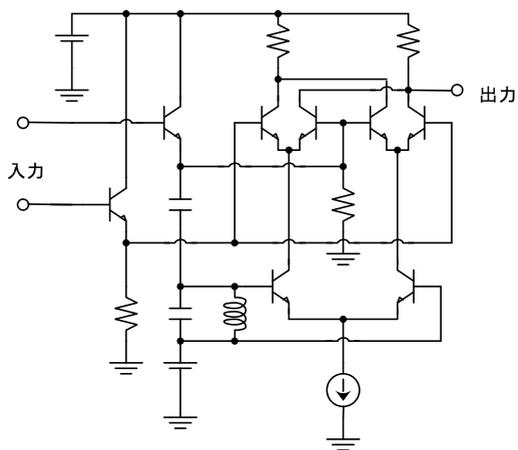


図 9.19 位相変化を利用した復調器

付録 A

素子の規格

この規格集は J I S の電子部品変のうち必要な部分を抜粋したものです。詳細については、J I S そのものを参照願います。

A.1 公称値に対する規定

次に定める E 標準数を用いられます。この場合抵抗はオーム [Ω]、容量はマイクロファラッド [μF]、およびピコファラッド [pF]、コイルはマイクロヘンリ [μH] を単位としています。

E3	1.0								2.2			
E6	1.0				1.5				2.2			
E12	1.0		1.2		1.5		1.8		2.2		2.7	
E24	1.0	1.1	1.2	1.3	1.5	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.7	3.0
E3					4.7							
E6	3.3				4.7				6.8			
E12	3.3		3.9		4.7		5.6		6.8		8.2	
E24	3.3	3.6	3.9	4.3	4.7	5.1	5.6	6.2	6.8	7.5	8.2	9.1

表 A.1 E 標準数の系列

A.1.1 3 数字法

これらの数値は、3 数字法という表現で用いられます。いくつか例をあげますと

<i>R</i> 47	0.47 [Ω]	0.47 [μF or <i>pF</i>]	0.47 [μH]
4 <i>R</i> 7	4.7 [Ω]	4.7 [μF or <i>pF</i>]	4.7 [μH]
471	470 [Ω]	470 [μF or <i>pF</i>]	470 [μH]

表 A.2 3 数字法

上の 2 行の *R* は小数点の位置を示しています。3 行目 3 桁目の数字は 10 の指数を示しています。この 3 数字法以外に 4 数字法というものがありますが、それについては JIS を参照願います。

A.1.2 許容差を表す記号

許容差は、次の記号を使って表現されます。

<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>J</i>	<i>K</i>
± 0.1	± 0.25	± 0.5	± 1	± 2	± 5	± 10
<i>L</i>	<i>M</i>	<i>N</i>	<i>Q</i>	<i>S</i>	<i>T</i>	<i>Z</i>
± 15	± 20	± 30	+30 -10	+50 -20	+50 -10	+80 -20

表 A.3 許容差を表す記号

A.1.3 色による表現

色を用いて数値を表現することもあり、次のようになっています。

数値	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
色	黒	茶	赤	黄赤	黄	緑	青	紫	灰色	白

表 A.4 色による表現

A.2 抵抗の規格

抵抗の規格である JIS 規格の抜粋です。詳しくは JIS を参照願います。

抵抗器の色表示

抵抗器は、次の色表示を用いて様々な値を示しています。

色名	数字	10 のべき数	抵抗値の許容差	抵抗値温度係数
銀色	—	−2	±10	—
金色	—	−1	±5	—
黒	0	0	—	±250
茶色	1	1	±1	±100
赤	2	2	±2	±50
橙	3	3	—	±15
黄	4	4	—	±25
緑	5	5	±0.5	±20
青	6	6	±0.25	±10
紫	7	7	±0.1	±5
灰色	8	8	—	±1
白	9	9	—	—
色無	—	—	±20	—

表 A.5 抵抗器の色表示

以上の色表示を用いて、有効数字 2 桁および 3 桁の抵抗は、次のように表示されています。

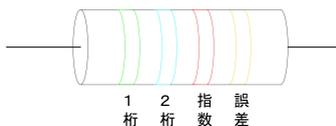


図 A.1 抵抗の色表示

A.3 容量の材料による違い

容量値および許容差については、公称値に対する値および許容差に基づいています。

容量の種類として、次のものがあります。

容量の種類	誘電体材料
Al 固体電界コンデンサ	Al 酸化皮膜
磁器コンデンサ (種類 1)	磁器
メタライズド・プラスチック・コンデンサ	プラスチック・フィルム
タンタル非電界コンデンサ	タンタル酸化皮膜
マイカ・コンデンサ	マイカ
プラスチック・フィルム・コンデンサ	プラスチック・フィルム
タンタル固体電界コンデンサ	タンタル酸化皮膜
複合フィルムコンデンサ	異種プラスチック・フィルムの組み合わせ

表 A.6 容量の種類

A.4 コイルの規格

コイルに関しては、抵抗や容量のような特別な規格は存在しませんが、抵抗や容量と同様にカラー・コードが用いられています。コイルの場合自分で作成したり、あるいは企業の場合には、特別注文でコイル・メーカーに発注する機会が多いことにより、多くの場合その値を示す特別な記号は用いられません。

付録 B

数について

ここでは、数の様々な表現について述べています。

B.1 数の表現

数を表現するとき、国によってその表現が異なります。様々な表現について述べておきます。

B.1.1 10のべき

国際単位系 (System Internationale d'Unites:SI) に定められている10のべき

数値	名称 (記号)	呼び方	数値	名称 (記号)	呼び方
10^{18}	exa(E)	エクサ	10^{-1}	deci(d)	デシ
10^{15}	peta(P)	ペタ	10^{-2}	centi(c)	センチ
10^{12}	tera(T)	テラ	10^{-3}	milli(m)	ミリ
10^9	giga(G)	ギガ	10^{-6}	micro(μ)	マイクロ
10^6	mega(M)	メガ	10^{-9}	nano(n)	ナノ
10^3	kilo(k)	キロ	10^{-12}	pico(p)	ピコ
10^2	hecto(h)	ヘクト	10^{-15}	femto(f)	フェムト
10^1	deca(da)	デカ	10^{-18}	atto(a)	アト

表 B.1 SI 単位

B.1.2 英米語の数詞

英米語の数詞を述べておきます。billion から英語と米語とで値が異なっていることに注意が必要です。

名称	米語	英語	名称	米語	英語
ten	10^1	10^1	decillion	10^{33}	10^{60}
hundred	10^2	10^2	undecillion	10^{36}	10^{66}
thousand	10^3	10^3	duodecillion	10^{39}	10^{72}
million	10^6	10^6	tredecillion	10^{42}	10^{78}
billion	10^9	10^{12}	quattuordecillion	10^{45}	10^{84}
trillion	10^{12}	10^{18}	quindecillion	10^{48}	10^{90}
quadrillion	10^{15}	10^{24}	sexdecillion	10^{51}	10^{96}
quintrillion	10^{18}	10^{30}	septendecillion	10^{54}	10^{102}
sextrillion	10^{21}	10^{36}	octodecillion	10^{57}	10^{108}
septrillion	10^{24}	10^{42}	novemdecillion	10^{60}	10^{114}
octrillion	10^{27}	10^{48}	vigintillion	10^{63}	10^{120}
nonillion	10^{30}	10^{54}	centillion	10^{303}	10^{600}

表 B.2 英米語の数詞

B.1.3 Laten 数字

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
mono	di	tri	tetra	penta	hexa	hepta	octa	nona	decca

表 B.3 Laten 数字

B.2 よく用いられる数値

電気電子回路において、よく用いられる数値について述べておきます。

B.2.1 平方根

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{6} \cong 2.4494897$
$\sqrt{2} \cong 1.4142136$	$\sqrt{7} \cong 2.6457513$
$\sqrt{3} \cong 1.7320508$	$\sqrt{8} \cong 2.8284271$
$\sqrt{4} = 4$	$\sqrt{9} = 3$
$\sqrt{5} \cong 2.2360680$	$\sqrt{10} \cong 3.1622777$

表 B.4 平方根

B.2.2 常用対数

$\log 1 = 0$	$\log 6 \cong 0.7781513$
$\log 2 \cong 0.3010300$	$\log 7 \cong 0.8450980$
$\log 3 \cong 0.4771213$	$\log 8 \cong 0.9030900$
$\log 4 \cong 0.6020600$	$\log 9 \cong 0.9542425$
$\log 5 \cong 0.6989700$	$\log 10 = 1$

表 B.5 常用対数

B.2.3 自然対数

$\ln 1 = 0$	$\ln 6 \cong 1.7917595$
$\ln 2 \cong 0.6931472$	$\ln 7 \cong 1.9459102$
$\ln 3 \cong 1.0986123$	$\ln 8 \cong 2.0794415$
$\ln 4 \cong 1.3862944$	$\ln 9 \cong 2.1972246$
$\ln 5 \cong 0.1.694379$	$\ln 10 \cong 2.30258511$

表 B.6 自然対数

B.3 数学定数

ここでは、さまざまな数学定数のうち、最も良く用いられる数値を掲載しておきます。

特殊な数字

$$e = 2.71828183$$

$$\pi = 3.14159265$$

$$\log e \cong 0.43429$$

$$\ln 10 \cong 2.3026$$

付録 C

周波数の分類と物理定数

ここではアナログ信号を取り扱う場合において、周波数の分類や物理定数について記述しています。

C.1 信号の分類と名称

色々な分け方が考えられますが、ここでは昔から行われている周波数の分類とその名称の付け方について述べています。

C.1.1 周波数の分類と名称

周波数は、取り扱う領域によって次の表 C.1 のように分類されています。

名称	周波数領域 [MHz]	波長 [m]
HF	3 ~ 30	100 ~ 10
VHS	30 ~ 300	10 ~ 1
UHS	300 ~ 1,000	1 ~ 0.3
L	1,000 ~ 2,000	0.3 ~ 0.15
S	2,000 ~ 4,000	0.15 ~ 0.075
C	4,000 ~ 8,000	0.075 ~ 0.0375
X	8,000 ~ 12,000	0.0375 ~ 0.025
Ku	12,000 ~ 18,000	0.025 ~ 0.0167
K	18,000 ~ 27,000	0.0167 ~ 0.0111
Ka	27,000 ~ 40,000	0.0111 ~ 0.0075

$c = 3.0 \times 10^8$ [m/sec] の場合

表 C.1 周波数の分類

C.2 物性に関する定数

ここではアナログ電気回路を学ぶ場合に必要な物理定数について述べています。

C.2.1 物理定数表

マックスウエルを取集場合に必ず必要となる、電気定数などについて主な定数について述べています。詳しくは市販の理科年表などが参考になると思われます。

物理定数	値	単位
素電荷	1.60210×10^{-19}	[クーロン]
ボルツマン定数	1.38054×10^{-23}	[JK ⁻¹]
真空の誘電率	8.854185×10^{-32}	[F/m]
真空の透磁率	$4\pi \times 10^{-7} \cong 1.256637 \times 10^{-6}$	[H/m]
絶対温度	-273.16	[°C]
シリコンの融点	1420	[°C]
禁制帯の幅	1.21	[eV]

表 C.2 物理定数表

C.2.2 シリコン中の拡散係数 (理科年表から抜粋)

実際に必要となる方は、集積回路などを製造する人には必須の定数ですが、回路関係の方もある程度知っておくことが望ましい定数です。不純物などの種類によって回路素子、特に半導体の信頼性などにも関わってきます。

次の式で表現される拡散式に対して必要となる定数です。詳細については物性に関する著書などを御覧ください。

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{U}{RT}\right)$$

不純物	D_0 [cm^2/sec]	U [kcal/mol]
B	10.5	85
Al	8.0	80
Ga	3.6	81
In	16.5	90
P	10.5	85
As	0.32	82
Sb	5.6	91
Fe	6.2×10^{-3}	20
Au	1.1×10^{-3}	25.8

表 C.3 シリコン中の拡散係数

付録 D

数学公式集

回路の問題を解くに当たって必要と思われる色々な数学の公式や定理を簡単に掲載しています。よって厳密性などはほとんど述べていません。厳密な証明など詳しいことについては、色々な専門書が発行されていますので、それらを参考にして下さい。

読みやすい専門書としてはスミルノフの「高等数学教程」、ちょっと難しいけれど厳密で有名なブルバキ*1の「数学教程」、その他ファン・デル・ヴェルデンによる「現代代数学」、シュヴァルツによる「解析学」などがあります。その他参考文献の中にも述べていますので、参考にして下さい。

D.1 微分・積分

ここでは、微分・積分の簡単な説明と公式について説明します。

*1 ブルバキという名称は、フランスの数学者集団の名称となっています。

微分の定義

$f(x)$ が定義域内の点 x で次に示す極限值を持つとき、この関数は点 x で微分可能であるといいます。

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{D.1})$$

微分の公式 (代表的な関数について)

u, v を x の関数であるとしみますと

$$\frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du} \frac{du}{dx} \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{d(uv)}{dx} = \frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx} \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} \quad (\text{D.4})$$

指数関数、対数関数の微分公式

$$\frac{d}{dx} (x^n) = nx^{n-1} \quad (\text{D.5})$$

$$\frac{d}{dx} (e^x) = e^x \quad (\text{D.6})$$

$$\frac{d}{dx} (a^x) = a^x \ln a \quad (\text{D.7})$$

$$\frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x} \quad (\text{D.8})$$

三角関数の微分公式

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad (\text{D.9})$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \quad (\text{D.10})$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \quad (\text{D.11})$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \sec x \quad (\text{D.12})$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\cot x \csc x \quad (\text{D.13})$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x \quad (\text{D.14})$$

積分の定義

$F(x)$ の導関数が $f(x)$ であるとき、任意の定数 c と $F(x)$ との和を $f(x)$ の原始関数または不定積分といい、これを次のように表します。

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

基本的性質

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx \quad (\text{D.15})$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \quad (\text{D.16})$$

部分積分

$$\int f(x) \frac{dg(x)}{dx} dx = f(x)g(x) - \int \frac{df(x)}{dx} d(x)dx \quad (\text{D.17})$$

置換積分

$x = \phi(t)$ で $d\phi(t)/dt$ が存在すれば、

$$\int f(x)dx = \int f[\phi(t)] \frac{d\phi(t)}{dt} dt \quad (\text{D.18})$$

D.2 ベクトル解析

ベクトル場は、あらゆる自然現象を説明する上で非常に重要な場であり、その場を解析する便利な数学分野としてベクトル解析があります。ここにあげてある公式は、任意の座標系において適用が可能であるため、非常に汎用性を持った公式となっています。

内積（スカラー積）

2つのベクトルの間の角度を θ とすると、ベクトルの内積は、次のように定義されます。

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \quad (\text{D.19})$$

内積の定義から分かりますように、二つのベクトルが直行するとき、それらのベクトルの内積はゼロとなります。また逆に内積がゼロである場合、それら二つのベクトルは直行します。

内積について次の公式が成り立ちます。

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{b} \bullet \mathbf{a} \quad (\text{D.20})$$

$$(\mathbf{pa} + \mathbf{qb}) \bullet \mathbf{c} = \mathbf{pa} \bullet \mathbf{c} + \mathbf{qb} \bullet \mathbf{c} \quad (\text{D.21})$$

$$|\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \quad (\text{シュワルツの不等式}) \quad (\text{D.22})$$

外積 (ベクトル積)

二つのベクトルの間の角度を θ とすると、ベクトルの外積は次のように定義されます。

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta \quad (\text{D.23})$$

外積の定義から、次の公式が得られます。

この定義式の中の角度 θ は向きを持っていますので、二つのベクトルの順番が入れ替わると符号が変わります。

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (\text{D.24})$$

$$k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) \quad (\text{D.25})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (\text{D.26})$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{a} \bullet \mathbf{a})(\mathbf{b} \bullet \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})^2} \quad (\text{D.27})$$

D.2.1 ベクトルの微分

ここではベクトル演算の中の微分について扱っています。

方向微係数

空間に点 P を選び、単位ベクトル \mathbf{b} によって方向を与えます。 C を P から \mathbf{b} の方向へ出る半直線とし、 Q を C 上の点とします。 P から Q までの距離は s とします。そのとき極限值

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(Q) - f(P)}{s} \quad (\text{D.28})$$

が存在すれば、それを点 P における \mathbf{b} 方向の f の方向微係数と呼びます。

D.2.2 定義

次にベクトル解析で用いられる、微分に関して重要な定義を述べます。ここで

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{D.29})$$

\mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} は各々 x 、 y 、 z 方向の単位ベクトルです。

勾配

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \nabla f \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) f \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

発散

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{v} &= \nabla \bullet \mathbf{v} \\ &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) f \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

回転

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v} &= \nabla \times \mathbf{v} \\ &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

D.2.3 勾配についての公式

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad (\text{D.33})$$

$$\nabla(f^n) = n f^{n-1} \nabla f \quad (\text{D.34})$$

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2}(g\nabla f - f\nabla g) \quad (\text{D.35})$$

$$\nabla^2(fg) = g\nabla^2 f + 2\nabla f\nabla g + f\nabla^2 g \quad (\text{D.36})$$

発散についての公式

$$\nabla \bullet (k\mathbf{v}) = k\nabla \bullet \mathbf{v} \quad (\text{D.37})$$

$$\nabla \bullet (\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) = \mathbf{u} \bullet (\nabla \bullet \mathbf{v}) + \mathbf{v} \bullet (\nabla \mathbf{u}) \quad (\text{D.38})$$

$$\nabla \bullet (\mathbf{u}\nabla \mathbf{v}) = \mathbf{u}\nabla^2 \mathbf{v} + \nabla \mathbf{u} \bullet \nabla \mathbf{v} \quad (\text{D.39})$$

回転および発散についての公式

$$\nabla \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \nabla \times \mathbf{u} + \nabla \times \mathbf{v} \quad (\text{D.40})$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (\text{D.41})$$

$$\nabla \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \bullet \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \bullet \nabla \mathbf{v} \quad (\text{D.42})$$

$$\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{D.43})$$

$$\nabla \times (f\mathbf{v}) = \nabla f \times \mathbf{v} + f\nabla \times \mathbf{v} \quad (\text{D.44})$$

$$\nabla \bullet (g\nabla f \times f\nabla g) = 0 \quad (\text{D.45})$$

D.3 行列式

ここでは簡単に行列について、様々な公式などを述べておきます。

和の公式

$$c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B} \quad (\text{D.46})$$

$$(c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A} \quad (\text{D.47})$$

$$c(d\mathbf{A}) = (cd)\mathbf{A} \quad (\text{D.48})$$

$$1 \times \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (\text{D.49})$$

積の公式

$$k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B}) \quad (\text{D.50})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \quad (\text{D.51})$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC} \quad (\text{D.52})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \quad (\text{D.53})$$

転置の公式

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \quad (\text{D.54})$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (\text{D.55})$$

逆行列の公式

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (\text{D.56})$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \quad (\text{D.57})$$

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \quad (\text{D.58})$$

正則な $n \times n$ 型行列 $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ の逆行列は、次のように与えられます。

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{D.59})$$

ただし A_{ij} は余因子です。(行と列の並び方に注意)

D.4 三角関数

三角関数の基本的な定理などについて扱っています。

加法定理

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \quad (\text{D.60})$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \quad (\text{D.61})$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B} \quad (\text{D.62})$$

$$\sin A \pm \sin B = 2 \sin \frac{A \pm B}{2} \cos \frac{A \mp B}{2} \quad (\text{D.63})$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad (\text{D.64})$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \quad (\text{D.65})$$

$$\sin A \sin B = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2} \quad (\text{D.66})$$

$$\cos A \cos B = \frac{\cos(A-B) + \cos(A+B)}{2} \quad (\text{D.67})$$

$$\sin A \cos B = \frac{\sin(A+B) + \sin(A-B)}{2} \quad (\text{D.68})$$

$$\cos A \sin B = \frac{\sin(A+B) - \sin(A-B)}{2} \quad (\text{D.69})$$

$$(\text{D.70})$$

2 倍の公式

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A \quad (\text{D.71})$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A \quad (\text{D.72})$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \quad (\text{D.73})$$

正弦、余弦関数の指数表現

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad (\text{D.74})$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x + \sin 3x) \quad (\text{D.75})$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4 \cos 2x + 3) \quad (\text{D.76})$$

$$\vdots$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \quad (\text{D.77})$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos 3x) \quad (\text{D.78})$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4 \cos 2x + 3) \quad (\text{D.79})$$

$$\vdots$$

D.5 複素関数

複素関数は特に回路理論においては重要な概念です。

可換法則

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \tag{D.80}$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

結合法則

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_2 + (z_1 + z_3) \tag{D.81}$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_2 (z_1 z_3)$$

分配法則

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \tag{D.82}$$

その他

$$\begin{aligned} 0 + z &= z + 0 = z \\ z + (-z) &= (-z) + z = 0 \\ z \times 1 &= z \end{aligned} \tag{D.83}$$

複素共役

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ \overline{z_1 \times z_2} &= \overline{z_1} \times \overline{z_2} \\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\end{aligned}\tag{D.84}$$

絶対値

$$\begin{aligned}|z_1 \times z_2| &= |z_1| \times |z_2| \\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\end{aligned}\tag{D.85}$$

ド・モアブルの公式

$$(\cos \theta + j \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + j \sin(n\theta)\tag{D.86}$$

コーシー・リーマンの方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\tag{D.87}$$

コーシーの積分定理

有界な単連結領域 D で $f(z)$ が解析関数であるなら、 D 内の全ての単純閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad (\text{D.88})$$

コーシーの積分公式

$f(z)$ が単連結領域 D で解析関数であるとします。 D 内の任意の点 z_0 と、 z_0 を囲む D 内の任意の単純閉路 C に対して、積分路を反時計周りに取りますと

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi j f(z_0) \quad (\text{D.89})$$

モレラの定理

単連結領域 D で $f(z)$ が連続で、かつ D 内の全ての閉路 C に対して、

$$\int_C f(z) dz = 0$$

が成り立つと、 $f(z)$ は単連結領域 D で解析的です。

リウビルの定理

有限複素平面内の全ての点に対して、 $f(z)$ が解析的でその絶対値が有界なら、 $f(z)$ は定数です。

D.6 双曲線関数

D.6.1 実数関数の双曲線関数

定義

x を実数として

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{D.90})$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{D.91})$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (\text{D.92})$$

基礎公式

$$\sinh(-x) = -\sinh(x) \quad (\text{D.93})$$

$$\cosh(-x) = \cosh(x) \quad (\text{D.94})$$

$$\tanh(-x) = -\tanh(x) \quad (\text{D.95})$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \quad (\text{D.96})$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \quad (\text{D.97})$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y} \quad (\text{D.98})$$

$$\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2} \quad (\text{D.99})$$

$$\sinh x - \sinh y = 2 \sinh \frac{x-y}{2} \cosh \frac{x+y}{2} \quad (\text{D.100})$$

$$\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2} \quad (\text{D.101})$$

$$\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2} \quad (\text{D.102})$$

$$\tanh x + \tanh y = \frac{\sinh(x+y)}{\cosh x \cosh y} \quad (\text{D.103})$$

$$\tanh x - \tanh y = \frac{\sinh(x-y)}{\cosh x \cosh y} \quad (\text{D.104})$$

$$\sinh x + \cosh x = \frac{1 + \tanh(x/2)}{1 - \tanh(x/2)} \quad (\text{D.105})$$

$$(\sinh x + \cosh x)^n = \sinh(nx) + \cosh(nx) \quad (\text{D.106})$$

D.6.2 複素関数の双曲線関数

定義

z を複素数として、

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad (\text{D.107})$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad (\text{D.108})$$

$$\tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \quad (\text{D.109})$$

基礎公式

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad (\text{D.110})$$

$$\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} \quad (\text{D.111})$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z} \quad (\text{D.112})$$

$$\operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z} \quad (\text{D.113})$$

$$\sinh z = -j \sin(jz) \quad (\text{D.114})$$

$$\cosh z = \cos(jz) \quad (\text{D.115})$$

$$\tanh z = -j \tan(jz) \quad (\text{D.116})$$

実数との関係

x, y を実数として、

$$\begin{aligned}\sinh(x \pm jy) &= \sinh x \cos y \pm j \cosh x \sin y \\ &= \sin x \cosh y \pm j \cos x \sinh y\end{aligned}\quad (\text{D.117})$$

$$\begin{aligned}\cosh(x \pm jy) &= \cosh x \cos y \pm j \sinh x \sin y \\ &= \cos x \cosh y \mp j \sin x \sinh y\end{aligned}\quad (\text{D.118})$$

$$\sinh x = -j \sin(jx) \quad (\text{D.119})$$

$$\cosh(x) = \cos(jx) \quad (\text{D.120})$$

$$\tanh x = -j \tan(jx) \quad (\text{D.121})$$

$$\sinh(jx) = -j \sin x \quad (\text{D.122})$$

$$\cosh(jx) = \cos x \quad (\text{D.123})$$

$$\tanh(jx) = j \tan x \quad (\text{D.124})$$

n を整数として、

$$\sinh(x + jn\pi) = (-1)^n \sinh x \quad (\text{D.125})$$

$$\cosh(x + jn\pi) = (-1)^n \cosh x \quad (\text{D.126})$$

$$\sinh \left[j \frac{(2n+1)}{2} \pi \right] = j \sin \left[\frac{(2n+1)}{2} \pi \right] \quad (\text{D.127})$$

$$\cosh \left[j \frac{(2n+1)}{2} \pi \right] = 0 \quad (\text{D.128})$$

$$\sinh \left(j \frac{\pi}{2} \pm x \right) = j \cosh x \quad (\text{D.129})$$

$$\cosh \left(j \frac{\pi}{2} \pm x \right) = \pm j \sinh x \quad (\text{D.130})$$

D.7 フーリエ解析

フーリエ解析も回路には必須の数学です。

D.7.1 フーリエ級数

任意の周期関数は、次に示すようにフーリエ級数の形に展開することができます。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi}{T}t + b_k \sin \frac{2k\pi}{T}t \right) \quad (\text{D.131})$$

ただし $k = 1, 2, 3, \dots$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (\text{D.132})$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt \quad (\text{D.133})$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \frac{2k\pi t}{T} dt \quad (\text{D.134})$$

代表的な関数のフーリエ級数を載せておきます。

周期 2π の方形波

$$f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ +k & 0 < x < \pi \end{cases} \quad (\text{D.135})$$

$$F(x) = \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right) \quad (\text{D.136})$$

任意周期の方形波

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -2 < x < -1 \\ k & -1 < x < +1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases} \quad \text{のとき } T = 4 \quad (\text{D.137})$$

$$F(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2}x + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi}{2}x - \dots \right) \quad (\text{D.138})$$

三角波

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{l}x & 0 < x < \frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l}(l-x) & \frac{l}{2} < x < l \end{cases} \quad (\text{D.139})$$

$$F(x) = \frac{8k}{\pi^2} \left(\frac{1}{l^2} \sin \frac{\pi}{l}x - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi}{l}x + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi}{l}x - \dots \right) \quad (\text{D.140})$$

D.7.2 フーリエ積分

非周期関数の場合にはフーリエ級数の方法を無限周期へ一般化して、フーリエ積分として取り扱うことが出来ます。

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] dw \quad (\text{D.141})$$

$$A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv \quad (\text{D.142})$$

$$B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv dv \quad (\text{D.143})$$

次にフーリエ積分の複素形式を記述しておきます。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{D.144})$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{D.145})$$

D.8 ラプラス変換

ラプラス変換は周波数特などを暑っ買うときや、特にフィルタにおいてはなくてはならない数学分野です。

定義

(片側) ラプラス変換は次のように定義されます。

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (\text{D.146})$$

$$f(t) = \int_0^{\infty} F(s)e^{st} ds \quad (\text{D.147})$$

線形性

$$\mathcal{L}[af(t) + ng(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)] \quad (\text{D.148})$$

微分

$$\mathcal{L}(f^n) = s^n \mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (\text{D.149})$$

積分

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)] \quad (\text{D.150})$$

移動定理

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a) \quad (\text{D.151})$$

畳み込み

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (\text{D.152})$$

可換法則

$$f * g = g * f \quad (\text{D.153})$$

分配法則

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2 \quad (\text{D.154})$$

結合法則

$$(f * g) * v = f * (g * v) \quad (\text{D.155})$$

付録 E

確率

雑音は信号の時間的揺らぎと考えられます。揺らぎを考えるに当たって、その数学的基礎である確率について知っておかねばなりません。

E.1 確率

ある実験の取りうる結果 s と時刻 t の関数 $x(t, s)$ を考え、その様な関数全ての族を $X(t, s)$ で表現し、これを確率と呼びます。

E.1.1 決定論、非決定論

標本関数の将来の値が、過去の値から予知されるとき決定論的と呼び、過去の値から正確に予知できないとき非決定論的と呼ばれます。

E.1.2 統計的平均、時間的平均

時間的平均は、次の式によって定義されます。

$$A[\cdot] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [\cdot] \quad (\text{E.1})$$

E.1.3 分布関数

時刻における確率変数 $X_1 = X(t_1)$ が持つ分布関数は、 x_1 を実数とすると、次のように定義されます。

$$F_X(x_1 ; t_1) = P[X(t_1) \leq x_1] \quad (\text{E.2})$$

N 個の確率変数 $I = 1, 2, \dots, N$ に対する N 次の結合分布関数は、次のように定義されます。

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_N ; t_1, t_2, \dots, t_N) = P[X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_N) \leq x_N] \quad (\text{E.3})$$

以上の分布関数から、結合密度関数はこれらの分布関数を微分することによって定義されます。

$$f_X(x_1 ; t_1) = \frac{dF_X(x_1 ; t_1)}{dx_1} \quad (\text{E.4})$$

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_N ; t_1, t_2, \dots, t_N) = \frac{\partial F_X(x_1, x_2, \dots, x_N ; t_1, t_2, \dots, t_N)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_N} \quad (\text{E.5})$$

E.1.4 定常、非定常

確率過程の統計的性質が、時刻と共に変わらないときその過程を定常と呼び、時刻とともに変化するとき非定常と呼びます。

どのような t_1 と Δ についても次式が成り立つ場合、次数 1 の定常と呼ばれます。ここで関数 f は、この後に出てくる密度関数です。

$$f_X(x_1 ; t_1) = f_X(x_1 ; t_1 + \Delta) \quad (\text{E.6})$$

同様に、次数 2 の定常は、次の式となります。

$$f_X(x_1, x_2 ; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2 ; t_1 + \Delta, t_2 + \Delta) \quad (\text{E.7})$$

この次数 2 の定常は、 $\Delta = -t_1$ と置けばわかりますように、時間そのものの関数ではなく時間差 $t_2 - t_1$ の関数です。

次数 N の定常も、同様な式で定義されます。

広義の定常過程は、次の 2 式によって定義されます。

$$E[X(t)] = \bar{X} \quad (\text{E.8})$$

$$E[X(t)X(t+\tau)] = R_{XX}(\tau) \quad (\text{E.9})$$

次数 2 の定常は、広義の定常となります。

二つの結合過程の各々が、広義の結合の二つの条件を満足し、相互相関関数が、時刻そのものの関数ではなく時刻差だけの関数である場合、この二つの確率は結合定常と呼ばれます。

E.1.5 統計的独立性

二つの確率 $X(t)$ と $Y(t)$ とが統計的独立であるとは、時刻 $t_1, t_2, \dots, t_N, t'_1, t'_2, \dots, t'_N$ をどのように選んでも確率変数の族 $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)$ がもう一方の族 $y(t'_1), y(t'_2), \dots, y(t'_N)$ と独立である場合、統計的独立と呼びます。これを式で示します。

$$\begin{aligned} f_{X, Y}(x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_M; t_1, t_2, \dots, t_N, t'_1, t'_2, \dots, t'_M) \\ = f_X(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) \times f_Y(y_1, y_2, \dots, y_M; t'_1, t'_2, \dots, t'_M) \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

E.1.6 自己相関関数

確率過程 X_1 と X_2 の結合積率を、自己相関関数と呼んでいます。

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] \quad (\text{E.11})$$

広義の定常過程の場合、自己相関関数には次の性質があります。

1. $|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$

2. $R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau)$

3. $R_{XX}(0) = E[X^2(t)]$

4. $X(t)$ が周期成分を持たなければ

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_{XX}(\tau) = \overline{X^2}$$

5. $X(t)$ が周期成分を持っていれば $R_{XX}(\tau)$ にも同じ周期成分があります。

6. $X(t)$ がエルゴートで、平均値ゼロかつ周期成分を持たなければ

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_{XX}(\tau) = 0$$

7. 任意の関数は自己相関関数 $R_{XX}(\tau)$ にはなりえません。

E.1.7 相互相関関数

二つの確率の相互相関関数は、次式によって定義されます。

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] \quad (\text{E.12})$$

また $X(t)$ と $Y(t)$ とが広義の結合定常であれば、相互相関関数は時刻に対して無関係となり、 $t_1 = t$ 、 $\tau = t_2 - t_1$ と置くと上の式は、次のようになります。

$$R_{XY}(t, t + \tau) = R_{XY}(\tau) \quad (\text{E.13})$$

$R_{XY}(t, t + \tau) = R_{XY}(\tau) = 0$ の場合、 $X(t)$ と $Y(t)$ とは直交過程と呼ばれます。また二つの過程が統計的に独立の場合

$$R_{XY}(t, t + \tau) = E[X(t)]E[Y(t + \tau)] \quad (\text{E.14})$$

となり、さらに $X(t)$ と $Y(t)$ とが広義の定常の場合、この式は一定値となり次の式で与えられます。

$$R_{XY}(\tau) = \overline{XY} \quad (\text{E.15})$$

広義の定常過程の場合に相互相関関数は、次の性質を持ちます。

1. $R_{XY}(-\tau) = R_{XY}(\tau)$
2. $|R_{XY}(\tau)| \leq \sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)}$

E.1.8 自己共分散、相互共分散

確率における自己共分散、相互共分散は、次のように定義されます。

$$\begin{aligned} C_{XX}(t, t + \tau) &= E[\{X(t) - E[X(t)]\}\{X(t + \tau) - E[X(t + \tau)]\}] \\ &= R_{XX}(t, t + \tau) - E[X(t)]E[X(t + \tau)] \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

$$C_{XY}(t, t + \tau) = R_{XY}(t, t + \tau) - E[X(t)]E[Y(t + \tau)] \quad (\text{E.17})$$

広義の（結合）定常の場合には、上の式は各々次のようになります。

$$C_{XX}(t, t + \tau) = C_{XX}(\tau) - R_{XX} - R_{XX}(\tau)(\bar{X})^2 \quad (\text{E.18})$$

$$C_{XY}(t, t + \tau) = C_{XY}(\tau) - R_{XY}(\tau) - \bar{X}\bar{Y} \quad (\text{E.19})$$

相互共分散がゼロの場合には無相関と呼ばれます。

E.1.9 分散

確率の分散は、自己共分散、相互共分散の式において、 $\tau = 0$ を代入することによって得られます。

E.1.10 パワー密度スペクトル

確率の周波数表現であるパワー密度スペクトルは、次のように定義されます。

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E \left[|X_T(\omega)|^2 \right]}{2T} \quad (\text{E.20})$$

ただし

$$\begin{aligned} X_T &= \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) \exp(-j\omega t) dt \\ &= \int_{-T}^T x(t) \exp(-j\omega t) dt \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

$$x_T = \begin{cases} x(t) & \cdot \cdot \cdot \quad -T < tT \\ 0 & \cdot \cdot \cdot \quad \text{その他の場合} \end{cases} \quad (\text{E.22})$$

このパワー密度スペクトルから、次の平均パワーが得られます。

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega \quad (\text{E.23})$$

この式を見て分かりますように、時間と事象の平均を取っていることに注意する必要があります。パワー密度スペクトルには、次の性質があります。

1. $S_{XX}(\omega) \geq 0$
2. $S_{XX}(-\omega) = S_{XX}(\omega)$ ただし $X(t)$ が実数の場合
3. $S_{XX}(\omega)$ は実数
- 4.

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega = A \{ E [X^2(t)] \}$$

ただし A は、時間平均を取ることを意味しています。

5. $S_{\dot{X}\dot{X}}(\omega) = \omega^2 S_{XX}(\omega)$ ここで \dot{X} は、 X の時間微分を示しています。
- 6.

$$A[\] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega \quad (\text{E.24})$$

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A [R_{XX}(t, t + \tau)] \exp(-j\omega\tau) d\tau \quad (\text{E.25})$$

このパワー密度スペクトルと自己相関関数との関係は、広義の定常過程の場合には

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega \quad (\text{E.26})$$

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \quad (\text{E.27})$$

と与えられ、フーリエ変換に似た形式となります。この関係式をウィナーヒンチンの関係と呼んでいます。

このパワー密度スペクトルに関連して、実行帯域幅は次のように定義されます。

$$W_{rms}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{XX}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega} \quad (\text{E.28})$$

ただしこの場合には低域特性を持った場合についての実行帯域幅を定義していますが、帯域通過の場合には次のようになります。

$$W_{rms}^2 = \frac{4 \int_0^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 S_{XX}(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega} \quad (\text{E.29})$$

ただし

$$\omega_0 = \frac{\int_0^{\infty} \omega S_{XX}(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega} \quad (\text{E.30})$$

E.1.11 相互パワー密度スペクトル

各々フーリエ変換を持つ二つの確率 $X(t)$, $Y(t)$ を考えます。そうすると相互パワー密度スペクトルは、次のように定義されます。

$$S_{XY}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[X_T^*(\omega)Y_T(\omega)]}{2T} \quad (\text{E.31})$$

$$S_{YX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[Y_T^*(\omega)X_T(\omega)]}{2T} \quad (\text{E.32})$$

これから平均相互パワーは、次のようになります。

$$P_{XY} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega) d\omega \quad (\text{E.33})$$

$$P_{YX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{YX}(\omega) d\omega \quad (\text{E.34})$$

この相互パワーには $P_{XY} = P_{YX}$ の関係があります。

1. $S_{XY}(\omega) = S_{YX}(-\omega) = S_{YX}^*(\omega)$
2. 相互パワー密度スペクトルの実数部分は ω に対して偶関数であり、虚数部分は奇関数です。
3. $X(t)$ と $Y(t)$ とが直交していれば、その相互パワー密度関数はゼロとなります。
4. $X(t)$ と $Y(t)$ とが無相関で、各々一定の平均を持っているとしますと

$$S_{XY}(\omega) = S_{YX}(\omega) = 2\pi \bar{X}\bar{Y} \delta(\omega)$$

5.

$$A[R_{XY}(t, t + \tau)] \Leftrightarrow S_{XY}(\omega)$$

$$A[R_{YX}(t, t + \tau)] \Leftrightarrow S_{YX}(\omega)$$

広義の結合定常過程の場合には、

$$R_{XY}(t) \Leftrightarrow S_{XY}(\omega)$$

$$R_{YX}(t) \Leftrightarrow S_{YX}(\omega)$$

相互パワースペクトル密度と相互相関関数との間には、次の関係が存在します。

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T R_{XY}(t, t + \tau) dt \right] \exp(-j\omega\tau) d\tau \quad (\text{E.35})$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T R_{XY}(t, t + \tau) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega \quad (\text{E.36})$$

線型回路のみを考えます。

例題

二つの変数があるとき、 y に完全に相関がある部分 ax と相関が無い部分 z とに分離することが出来、次の関数で表される線形相関となります。

$$y = ax + z \quad (\text{E.37})$$

ただし a は定数

平均 $\bar{x} = \bar{y} = 0$ である場合、次の式が成り立ちます。

$$\overline{xy} = a\overline{x^2} \quad (\text{E.38})$$

このときの相関係数は、次のようになります。

$$\begin{aligned} c &= \frac{\overline{xy}}{\sqrt{\overline{x^2 y^2}}} \\ &= \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2 x^2}}} \end{aligned} \quad (\text{E.39})$$

E.1.12 自己相関関数

ある揺らぎ量 $x(t)$ に対して $\overline{x(t)x(t+s)}$ を自己相関関数と呼んでいます。この自己相関関数は、次の式にて定義されています。

$$\overline{x(t)x(t+s)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+s)f(t)dt \quad (\text{E.40})$$

ただし

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$

$f(t) : x(t)$ が発生する確率密度関数

また次の式で示す量は、正規化相関関数と呼んでいます。

$$c(s) = \frac{\overline{x(t)x(t+s)}}{x(t)^2} \quad (\text{E.41})$$

この正規化相関関数は s の関数であり、 $s=0$ で 1 となり、 $s=0$ を中心にして対称です。また $s=0$ から離れるにつれ正規化相関関数は急激に減少します。そこで正規化相関関数は τ_0 で示す、揺らぎの時定数を決めることが出来ます。この τ_0 は、 $s \gg \tau_0$ のとき $\overline{x(t)x(t+s)} = 0$ です。定常状態に達していない揺らぎの時間平均は、次のように定義されます。

$$X_\tau = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} x(u)du \quad (\text{E.42})$$

E.1.13 揺らぎ量の Fourier 解析

揺らぎ量 $x(t)$ の Fourier 級数は、次の式で表すことが出来ます。

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_0 \exp(j\omega_n t) \quad (\text{E.43})$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(u) \exp(-j\omega_n u) du \quad (\text{E.44})$$

ただし

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T_0} = 2\pi n \Delta f \quad (\text{E.45})$$

$$\Delta f = \frac{1}{T_0} \quad (\text{E.46})$$

更に次の関係が成立します。

$$a_n = a_n^* \quad (\text{E.47})$$

ただし * は、複素共役であることを示しています。

周波数 ω_n の fourier 成分は、次のように表すことが出来ます。

$$x_n = a_n \exp(j\omega_n t) + a_{-n} \exp(-j\omega_n t) \quad (\text{E.48})$$

次に上の式の二乗平均を、元の揺らぎ量で表現することが出来た

$$\begin{aligned} \overline{x_n^2} &= 2\overline{a_n a_{-n}} \\ &= \frac{2}{T_0^2} \int_0^{T_0} \int_0^{T_0} \overline{x(u)x(u')} \exp[-j\omega_n(u-u')] du du' \\ &= \frac{2}{T_0^2} \int_0^{T_0} du \int_{-u}^u \overline{x(u)x(u+s)} \exp(j\omega_n s) ds \\ &= \left[4 \int_0^\infty \overline{x(u)x(u+s)} \cos \omega_n s ds \right] \Delta f \\ &= w(f_n) \Delta f \end{aligned} \quad (\text{E.49})$$

$w(f_n)$ はスペクトル強度、電力スペクトル、または雑音を取り扱うときには雑音スペクトルと呼ばれます。また $\Delta f = 1/T_0$ が小さい場合には、次の Wiener-Khinchine の定理が得られます。

定理 3 Wiener-Khinchine の定理

$$w(f) = 4 \int_0^\infty \overline{x(t)x(t+s)} \cos \omega s ds \quad (\text{E.50})$$

この逆変換は、次の式で与えられます。

$$\overline{x(u)x(u+s)} = \int_0^\infty w(f) \cos \omega s \quad (\text{E.51})$$

上の式から、次の式が成立することが分かります。

$$w(0) = 4 \int_0^\infty \overline{x(t)x(t+s)} ds \quad (\text{E.52})$$

E.1.14 例題

白色雑音の場合には、次の式となります。証明は省略します。

$$\overline{x(t)x(t+s)} = A\delta(s) \quad (\text{E.53})$$

$$w(0) = 2A \quad (\text{E.54})$$

付録 F

確立過程

ここでは確率過程について、簡単に纏めています。確率過程とは、確率で時間変化を扱った数学です。確率に時間成分が含まれると、急に難しくなります。しかし現実の世界は、時間成分を含まないと十分に表現することは出来ません。

F.0.1 確立過程の定義

まず始めに確立過程において用いられる、様々な言葉の定義について纏めておきます。

確立過程の分類

確立過程は、次の四つに分類することが出来ます。

1. 連続的確立過程
時間軸も取りうる値も連続的である場合。
2. 離散的確立過程
時間軸は連続であるが、とり得る値は離散値である場合。
3. 連続的確立数列
時間軸が離散値しかとらないが、とり得る値は連続である場合。
4. 離散的確立数列
時間軸の値および取りうる値も離散値である場合。

F.0.2 分布関数と密度関数

確率を P によって表しますと、特定の時間 t_1 における確率変数 $X_1 = X(t_1)$ が持つ分布関数は、 $F_X(x_1 : t_1)$ と記され、次の式で定義されます。

$$F_X(x_1 : t_1) = P[X(x_1) \leq x_1] \quad (\text{F.1})$$

二つの確率変数 $X_1 = X(t_1)$ と $X_2 = X(t_2)$ に対する 2 次の結合分布関数および多数の確率変数の場合の分布関数は、次のように定義されます。

$$F_X(x_1, x_2 : t_1, t_2) = P[X(x_1) \leq x_1, X(x_2) \leq x_2] \quad (\text{F.2})$$

$$F_X(x_1, \dots, x_n : t_1, \dots, t_n) = P[X(x_1) \leq x_1, \dots, X(x_n) \leq x_n] \quad (\text{F.3})$$

これらの分布関数に対応する密度関数は、次のように与えられます。

$$f_X(x_1 : t_1) = \frac{dF_X(x_1 : t_1)}{dx_1} \quad (\text{F.4})$$

$$f_X(x_1, x_2 : t_1, t_2) = \frac{\partial F_X(x_1, x_2 : t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (\text{F.5})$$

$$f_X(x_1, \dots, x_n : t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial F_X(x_1, \dots, x_n : t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1, \dots, \partial x_n} \quad (\text{F.6})$$

F.0.3 自己相関関数

次のように定義されています。

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] \quad (\text{F.7})$$

相互相関関数

次のように定義されています。

$$R_{XY}(t, t + \tau) = E[X(t)Y(t + \tau)] \quad (\text{F.8})$$

直交過程

次の式が成立する場合 $X(t)$ と $Y(t)$ とは、直交過程と呼ばれます。

$$R_{XY}(t, t + \tau) = 0 \quad (\text{F.9})$$

自己共分散関数

$$\begin{aligned} C_{XX}(t, t + \tau) &= E(\{X(t) - E[X(t)]\} \{X(t + \tau) - E[X(t + \tau)]\}) \\ &= R_{XX}(t, t + \tau) - E[X(t)] \times E[X(t + \tau)] \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

相互共分散関数

$$\begin{aligned} C_{XY}(t, t + \tau) &= E(\{X(t) - E[X(t)]\} \{Y(t + \tau) - E[Y(t + \tau)]\}) \\ &= R_{XY}(t, t + \tau) - E[X(t)] \times E[Y(t + \tau)] \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

F.0.4 無相関

二つの確立過程において次の式が成立するとき、これら二つの確立過程は無相関であると言います。

$$C_{XY}(t, t + \tau) = 0 \quad (\text{F.12})$$

このとき、次の関係式も成立します。

$$R_{XY}(t, t + \tau) = E[X(t)] \times E[Y(t + \tau)] \quad (\text{F.13})$$

時間平均

時間平均は次の式によって定義されます。

$$A(\bullet) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (\bullet) dt \quad (\text{F.14})$$

時間的自己相関関数

$$R_{XX}(\tau) = A[x(t)x(t + \tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t + \tau) dt \quad (\text{F.15})$$

決定論および非決定論

決定論とは未来が予測できる場合であり、非決定論とは予測が不可能な場合です。

F.0.5 定常性と独立性

簡単には、定常性とは、確率過程の統計的性質が時間によって変わらないことを言い、その他の場合を非定常と呼びます。定常性にもいくつかの段階が存在しますので、厳密には次に述べる確率過程での分布関数や密度関数によって定義しなければなりません。

統計的独立性

統計的に独立であるとは、二つの過程 $X(t)$ と $Y(t)$ とにおいて、片方の確率変数の群 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)$ が、もう一方の群 $Y(t_{1'}), Y(t_{2'}), \dots, Y(t_{N'})$ と時刻 $t_1, t_2, \dots, t_N, t_{1'}, t_{2'}, \dots, t_{N'}$ をどのように選んでも独立であるときのことを言います。このとき、次の式が成立しなければなりません。

$$\begin{aligned} & f_{XY}(x_1, \dots, x_N, y_{1'}, \dots, y_{N'}; t_1, t_2, \dots, t_N, t_{1'}, t_{2'}, \dots, t_{N'}) \\ &= f_X(x_1, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) \times f_Y(y_{1'}, \dots, y_{N'}; t_{1'}, t_{2'}, \dots, t_{N'}) \end{aligned} \quad (\text{F.16})$$

1 次の定常過程

確率過程は、その 1 次の密度関数が時刻起点の推移に対して不変であるならば、次数 1 の定常と呼ばれます。このとき次に示す式が、 Δ のどの様な値に対しても成立します。

$$f_X(x_1; t_1) = f_X(x_1; t_1 + \Delta) \quad (\text{F.17})$$

この式は、次のように変形することが出来ます。つまり期待値は、一定の値となることです。

$$E[X(t)] = \bar{X} \quad (\text{F.18})$$

2 次の定常

2 次の密度関数が、あらゆる t_1, t_2 および Δ に対して、次の式が常に成り立つ場合、この確率過程は 2 次の定常と呼ばれます。

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; t_1 + \Delta, t_2 + \Delta) \quad (\text{F.19})$$

この式は、2 次の密度関数が時間差のみの関数であり、時間そのものには関係しないことを示しています。

2 次の定常過程の自己相関関数は、時刻差だけの関数であって、時刻そのものの関数にはなりません。式で表現しますと、 $\tau = t_2 - t_1$ と置けば、このことは次の式が成立することを意味しています。

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(\tau) \quad (\text{F.20})$$

F.0.6 広義の定常

2 次の定常は必要以上に制約的であり、よりゆるい形の定常が必要になる場合があります。そのとき用いられるのがここに述べる広義の定常であり、次の二つの式が成立する場合の過程を言います。

$$E[X(t)] = \bar{X} \quad \text{: 一定} \quad (\text{F.21})$$

$$E[X(t)X(t+\tau)] = R_{XX}(\tau) \quad (\text{F.22})$$

N 次および厳密な定常性

N 個の確率変数に拡張し、もしもある確率過程の N 次の密度関数が、時刻起点の推移に対して不変、つまり次の式があらゆる t_1, \dots, t_N および Δ について成立するとき、この確率過程は N 次の定常と呼ばれます。

$$f_X(x_1, \dots, x_N; t_1, \dots, t_N) = f_X(x_1, \dots, x_N; t_1 + \Delta, \dots, t_N + \Delta) \quad (\text{F.23})$$

あらゆる次数 $N = 1, 2, \dots$ に対して定常な過程は、厳密な定常と呼ばれています。

F.0.7 エルゴート性

統計平均と時間平均とが等しくなる過程のことを、エルゴート過程と呼びます。また二つの確率過程が個々の過程においてエルゴートであり、またそれらの時間的相互相関関数が統計的相互相関関数に等しい、つまり

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau)dt = R_{XY}(\tau) \quad (\text{F.24})$$

であるならば、結合エルゴートと呼ばれます。

F.0.8 複素確立過程

1. 次の二つの実確立過程によって定義される確立過程のことを、複素確立過程と呼びます。

$$Z(t) = X(t) + jY(t) \quad (\text{F.25})$$

2. 複素過程の平均値は

$$E[Z(t)] = E[X(t)] + jE[Y(t)] \quad (\text{F.26})$$

3. 自己相関関数

$$R_{ZZ}(t, t+\tau) = E[Z^*(t)Z(t+\tau)] \quad (\text{F.27})$$

4. 自己共分散関数

$$C_{ZZ}(t, t + \tau) = E \left\{ (Z(t) - E[Z(t)])^* \{Z(t + \tau) - E[Z(t + \tau)]\} \right\} \quad (\text{F.28})$$

5. 相互相関関数

$$R_{Z_i Z_j}(t, t + \tau) = E [Z_i^*(t) Z_j(t + \tau)] \quad i \neq j \quad (\text{F.29})$$

6. 相互共分散関数

$$C_{Z_i Z_j}(t, t + \tau) = E \left\{ (Z_i(t) - E[Z_i(t)])^* \{Z_j(t + \tau) - E[Z_j(t + \tau)]\} \right\} \quad i \neq j \quad (\text{F.30})$$

7. 無相関

次の式が成立する場合、無相関と呼ばれます。

$$C_{Z_i, Z_j} = 0 \quad i \neq j \quad (\text{F.31})$$

8. 直交過程

次の式が成立する場合、直交過程と呼ばれます。

$$R_{Z_i, Z_j}(t, t + \tau) = 0 \quad i \neq j \quad (\text{F.32})$$

F.0.9 パワー密度スペクトル

確立過程においては、一般に確定信号における電圧や電流のような信号のスペクトルと言うのは定義できません。そこでその代わりとしてパワー密度スペクトルを定義して、通常このパラメータが用いられます。

1. 平均パワー

確立過程においては、次のような平均パワーが定義されます。

$$\begin{aligned} P_{XX} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E [X^2(t)] dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E \left\{ |X_T(\omega)|^2 \right\}}{2T} d\omega \end{aligned} \quad (\text{F.33})$$

2. パワー密度スペクトル

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E \left\{ |X_T(\omega)|^2 \right\}}{2T} \quad (\text{F.34})$$

以上の二つから

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega \quad (\text{F.35})$$

ここで

$$\begin{aligned} X_T(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} X_T(t) \exp(-j\omega t) dt \\ &= \int_{-T}^T X_T(t) \exp(-j\omega t) dt \end{aligned} \quad (\text{F.36})$$

3. パワー密度スペクトルの帯域幅

$$W_{rms}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{XX}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega} \quad (\text{F.37})$$

相互パワー密度スペクトル

1. 平均相互パワー

$$\begin{aligned} P_{XY} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R_{XY}(t, t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[X_T^*(\omega) Y_T(\omega)]}{2T} \end{aligned} \quad (\text{F.38})$$

2. 相互パワー密度スペクトル

$$S_{XY}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[X_T^*(\omega) Y_T(\omega)]}{2T} \quad (\text{F.39})$$

X と Y とを入れ替えた、相互パワー密度スペクトルを定義することも出来ます。

F.1 確率過程の定理

自己相関関数の性質

1. $|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$
2. $R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau)$
3. $R_{XX}(0) = E[X^2(t)]$
4. $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_{XX}(\tau) = \bar{X}^2$
5. $X(t)$ に周期成分があれば、 $R_{XX}(\tau)$ も同じ周期の成分が含まれる。
6. $X(t)$ がエルゴート、平均値ゼロ活周期成分を持たない場合

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_{XX}(\tau) = 0$$

7. $R_{XX}(\tau)$ は任意の形を持たない。

相互相関関数の性質

広義の定常である場合

1. $R_{XY}(-\tau) = R_{XY}(\tau)$
2. $|R_{XY}(\tau)| \leq \sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)}$
3. $|R_{XY}(\tau)| \leq \frac{R_{XX}(0)+R_{YY}(0)}{2}$

共分散関数

広義の定常である場合

1. $C_{XX}(t, t + \tau) = C_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau) - \bar{X}^2$
2. $C_{XY}(t, t + \tau) = C_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) - \bar{X}\bar{Y}$

分散

3. $\sigma_X^2 = E\left(\{X(t) - E[X(t)]\}^2\right) = R_{XX}(0) - \bar{X}^2$

複素確立過程

1. $X(t)$ と $Y(t)$ とが結合定常であるなら $Z(t)$ は定常です。
2. $X(t)$ と $Y(t)$ とが広義の結合定常であるなら $Z(t)$ は広義の定常です。
3. 二つの複素過程 $Z_i(t)$ と $Z_j(t)$ の各々が広義の定常で、相互相関関数が時刻差だけの関数であれば、この二つの関数は、広義の結合定常です。

パワー密度スペクトル

1. $S_{XX}(\omega) \geq 0$
2. $S_{XX}(-\omega) = S_{XX}(\omega)$ $X(t)$ は実数
3. $S_{XX}(\omega)$ は実数
4. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega = A \{E[X^2(t)]\}$
5. $S_{\dot{X}\dot{X}}(\omega) = \omega^2 S_{XX}(\omega)$
6. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega$

$$= A [R_{XX}(t, t + \tau)]$$

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A [R_{XX}(t, t + \tau)] \exp(-j\omega\tau) d\tau$$

広義の定常過程の場合 (ウイナー・ヒンチンの関係)

7. $S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau$
8. $R_{XX}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\tau) \exp(j\omega\tau) d\tau$

相互パワー密度スペクトル

1. $S_{XY}(\omega) = S_{YX}(-\omega) = S_{YX}^*(\omega)$
2. $\Re [S_{XY}(\omega)]$ と $\Re [S_{YX}(\omega)]$ は偶関数
3. $\Im [S_{XY}(\omega)]$ と $\Im [S_{YX}(\omega)]$ は奇関数
4. $X(t)$ と $Y(t)$ が直交している場合、 $S_{XY}(\omega) = 0$ または $S_{YX}(\omega) = 0$
5. $X(t)$ と $Y(t)$ が無相関で、各々一定の平均値を持つ場合 $S_{XY}(\omega) = S_{YX}(\omega) = 2\pi \bar{X}\bar{Y} \delta(\omega)$
6. $A [R_{XY}(t, t + \tau)] \Leftrightarrow S_{XY}(\omega)$, $A [R_{YX}(t, t + \tau)] \Leftrightarrow S_{YX}(\omega)$

広義の定常過程の場合

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau$$

$$R_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\tau) \exp(j\omega\tau) d\tau$$

$$S_{YX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau$$

$$R_{YX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{YX}(\tau) \exp(j\omega\tau) d\tau$$

複素過程のパワースペクトル

複素過程 $Z_m(t)$ と $Z_n(t)$ とが広義の結合定常である場合

$$S_{Z_m Z_n}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{Z_m Z_n}(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau$$

$$R_{Z_m Z_n}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{Z_m Z_n}(\tau) \exp(j\omega\tau) d\tau$$

参考文献

- [1] 新原盛太郎,「ダイオード/トランジスタ/FET 活用入門」、CQ 出版 1987.
- [2] 新原盛太郎,「SPICE とデバイス・モデル」, CQ 出版, 2005.
- [3] shinbara, Amplitude Modulation, U.S. Patent No. 4-547-752, 特公昭 58-171105, 1995.
- [4] 新原盛太郎,「電気回路基礎」、アマゾン電子書籍、2019.
- [5] 新原盛太郎,「アナログ回路設計法」、アマゾンペーパーバック、2022.
- [6] 新原盛太郎,「設計のための電気」、アマゾンペーパーバック、2022.
- [7] A. C. Smith, R. B. Adler and R. L. Longini, Introduction to Semiconductor Physics, vol. 1, John Wiley and Sons, Inc., 1964.
- [8] A. R. Boothroyd, P. E. Gray, D. DeWitt and J. F. Gibbons, Physics Electronics and Circuit Models of Transistors, vol. 2, John Wiley and Sons, Inc., 1964.
- [9] E. J. Angelo, P. E. Gray, C. L. Seale, A. R. Boothroyd and D. O. Pederson, Elementary Circuit Properties of Transistors, vol. 3, John Wiley and Sons, Inc., 1964.
- [10] P. E. Gray, R. D. Thornton, D. DeWitt and E. R. Chenette, Characteristics and Limitations of Transistors, vol. 4, John Wiley and Sons, Inc., 1964.
- [11] P. R. Gray and R. G. Meyer, Analysis and Design of Analog Integrated Circuits, Wiley, 1977.
- [12] 川上正光,「電子回路」第 III 卷、共立全書、1955.
- [13] William H. Hayt and Jack E. Kemmerly, Engineering Circuit Analysis, Third edition McGraw-Hill, 1971.
- [14] John D. Ryder, "Networks lines and fields," Prentice-hall, Inc, 1949.
- [15] Louis Weinberg, Network Analysis and Synthesis, McGraw-Hill, 1952.
- [16] Ernst A. Guillemin, "Introductory Circuit Theory" Jon Wiley and Sons. Inc., 1953.
- [17] Ernest A. Guillemin、「回路網合成」、近代科学者、1957.
- [18] J.G. Linvill and J.F. Gibbons, Transistor and Active Circuits, McGraw-Hill, 1961.
- [19] Paul M. Chirliam, 「集積回路網の解析と合成」、学献社、1971.
- [20] Ronald A. Rohrer, "Circuit Theory: An introduction to the state variable approach," McGraw-Hill, 1971.
- [21] J. M. Early, Effects of space-charge layer widening in junction transistors, Proc. IRE, 40, 1401-1406, Nov. 1952.
- [22] I. E. Getreu, Modeling the Bipolar Transistor, Amsterdam Elsevier, 1978.
- [23] J. J. Ebers and J. L. Moll, Large-signal behavior of junction transistors, Proc. IRE, 42, 1761-

- 1772, Dec. 1954.
- [24] T. H. Ning and D. D. Tang, Method for determining the emitter and base series resistance of bipolar Transistors, IEEE trans. Electron Dev., 31 : 409-412, 1984.
- [25] George. Clayton. 実用オペアンプ回路、マイテック、1075.
- [26] David F. Stout, Operational Amplifire Circuit Design, McGraw-Hill, 1976.
- [27] van der Zile, Thermal Noise in Field Effect Transistor, Proc. IEEE, 50, 8, 1808-1812, 1962.
- [28] van der Zile, Gate Noise in Field Effect Transistor at Moderately High Froquencies, Proc. IEEE, 51, 3, 461-467, 1963.
- [29] A. Hajimiri and T. H. Lee, A General Theory of Phase Noise in Electrical Oscillators, IEEE Solid-State Circuits, Vol. 33, No. 2, 1998.
- [30] Athanssions Popoulis, The Fourie Integral and its Applications, McGraw-Hill, New York, 1970.
- [31] Athanssions Popoulis, Circuit and Systems, CBS 出版, 1980.
- [32] Piet Wambacq and Willy Sanaen, Distortion Analysis of Analog Integrated Circuits, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [33] Leon O. Chua, Charles A. Desor and Ernest S. Kuh, Linear and Nonlinear Circuits, McGraw-Hill, 1987.
- [34] K. Kurokawa, Some basic characteristics of broad bans negative resistance oscillator circuit, Bell Syst. Tech. J., vol. 48, 1937-1955, 1978.
- [35] Jozeph La Salle, Solomon Lafschetz, Stability by Liapunov's Direct Method, Academic press, 1961.
- [36] Solomon Lefschetz, Stability of Nonlinear Control Systems, Academic press, 1965.
- [37] M. E. Van Valkenburg, Analog Filter Design, Holt-Saunders International Editions, 1982.
- [38] F. R. コナー、フィルタ回路入門、森北出版
- [39] Wai-Kai Chen, The circuits and Filters, IEEE press, 1995.
- [40] Igor Bazovsky, Reliability Theory and Practice, Maruzen Asia Edition, 1963.
- [41] John J. D'Azzo, Costantine H. Houpis, Linear Control System Analysis and Design, McGraw Hill, 1981.
- [42] B. N. Cmiphob, (スミルノフ) 高等数学教程 全 1 2 巻、共立出版、1958.
- [43] Nicolas Bourbaki, (ブルバキ) 数学原論 全 3 3 巻、東京図書、1969.
- [44] B. L. van der Waerden, 現代代数学 全 3 巻、東京都勉、1959.
- [45] マリツェフ、現代代数学、東京都勉、1978.
- [46] Laurent Schwartz, 解析学 全 7 巻、東京都勉、1970.
- [47] Laurent Schwartz, 物理数学の方法、岩波書店、1966.
- [48] nickerson, Spencer and Steenrod, 現代ベクトル解析、岩波書店、1965.
- [49] F. Smithies, 積分方程式論、講談社、1971.
- [50] C. Carolo Friderico Gauss, ガウス整数論、1995.

索引

- Armstrong, 124
 アーリー効果, 6, 34
 アーリー電圧, 38
 IMFDR, 62
 アイ開口率, 66
 IC, 19
 アイソレーション, 34
 アナログ, 17
 アナログ計算機, 3, 87
 アバランシェ雑音, 49, 55
 アルミ, 21
 アンダーシュート, 65
 安定性, 103

 位相, 110, 133
 位相雑音, 106
 位相発振回路, 110
 位相発振器, 110
 位相変調, 114, 119
 位相余裕, 84
 Intercept, 61
 Intermodulation, 59
 インダクタンス, 14, 16

 AD/DA 変換器, 2
 SSB, 115, 123
 S パラメータ, 25
 H パラメータ, 32
 エネルギー, 102
 エバース・モル・モデル, 30, 40
 エミッタ, 40
 LC 発振回路, 108
 演算増幅器, 68, 87

 オート・チューニング, 24
 オーバーシュート, 65

 開放ループ利得, 82
 開ループ利得, 68
 回路設計, 2
 各周波数, 117
 確率, 50
 加算器, 90
 仮想設置, 89
 下側波帯, 115
 カットオフ領域, 35, 39
 ガリウム砒素, 21, 28
 ガルバノメータ, 11
 Current Convoyer, 93
 還送比, 68
 感度, 70
 ガンメル・プーン・モデル, 30
 簡略化モデル, 30, 31, 40
 簡略モデル, 2

 規格, 3
 帰還回路, 45, 77
 帰還増幅器, 2, 95
 寄生容量, 7
 機能回路, 45
 基盤, 34
 基本周波数, 57
 共振周波数, 52
 行列式, 101
 ギルバート・セル, 121
 近似等価回路, 76

 空間電荷層, 53
 クラップ, 108
 クリップ, 56
 Cross-modulation, 63

 計測器, 11
 ゲート, 37, 42

検流計, 15

コイル, 12

格子欠陥, 53

格子同調, 108

高調波, 57, 100, 103

交流電力, 95

交流等価回路, 31

コーナー周波数, 107

Cowan 変調, 121

Cowan 変調器, 121

コルピッツ, 108

コルピッツ発振器, 98

コレクタ, 41

最適制御, 67

サイリスタ, 21

雑音, 49, 70, 97, 106

雑音電圧, 52

雑音電力, 125

サブストレート, 35

三角関数, 104

三極管領域, 39

CR 発振器, 110

Seeley-Avins 回路, 131

シールド, 25

磁界, 11

磁石, 14

四捨五入, 17

磁束, 14

磁束密度, 12

室温, 51

実効チャネル, 38

重金属, 54

従属電源, 73, 81

周波数, 16

周波数復調器, 128

周波数分類, 3

周波数変調, 114, 117, 119

周波数変調器, 123

樹脂, 7

小信号, 19

小信号等価回路, 23

上側波帯, 115

ショットキー, 21

Schottky の定理, 50

ショット雑音, 107

ショット雑音, 49

シリコン, 21, 28

振幅雑音, 106

振幅復調器, 126

振幅変調, 114

振幅変調器, 119

水晶発振回路, 111

スイッチ, 22

数値解析, 20

SPICE, 2

スペクトラム, 116

正帰還, 95, 97

正弦関数, 114

積分器, 91

絶対温度, 51

絶対零度, 51

節点方程式, 99

セラミック共振子, 111

線形, 97

線形歪, 55

増幅器, 2, 45

ソース, 38, 42

側波帯, 118

耐圧, 6

ダイオード, 2, 20, 120

大信号, 19, 30

ダイナミックレンジ, 62

タイミング, 132

多段増幅器, 47

立ち上がり時間, 65

立ち下り時間, 65

ダブルバランス, 121

単位電流源, 83

遅延時間, 65

調和振動子, 52

直流電力, 95

強い歪, 56

DSB, 115

ディエンファシス, 126

ディスクリット, 35

デジタル, 18

- 定常状態, 96
 ディスクリート, 98
 デシベル, 46
 電圧比利得, 48
 電子, 50
 電磁気学, 12
 伝達関数, 71
 伝達特性, 59, 73, 75
 伝達比利得, 48
 電流計, 14
 電流測定, 11
 電流比利得, 48
 電流プローブ, 13
 電流偏差, 51
 電流密度, 12
 電流利得, 82
 電力, 14
 電力メータ, 14
 電流利得, 48

 等価回路, 19, 22, 29
 同期検波, 127
 同相除去比, 33
 同調回路, 103
 等分配則, 52
 独立事象, 50
 トライアック, 21
 トラップ, 53
 トランジスタ, 2, 27
 トランス, 129
 トリガ, 97
 トルク, 12
 ドレイン, 42
 ドレイン電流, 38

 ナイキスト線図, 84
 Nyquist の定理, 53
 ナイキスト判定法, 83
 ナイキスト平面, 84

 入力換算雑音, 62

 熱雑音, 49, 51

 能動素子, 110
 ノートンの定理, 52

 バースト雑音, 54

 バースト雑音, 49
 ハートレー, 108
 Harmonic Distortion, 57
 ハイブリッド π ・モデル, 31
 白色雑音, 49
 発疹可能条件, 101
 発振器, 3, 45, 95
 発振振幅, 96
 ばらつき, 8
 パラメータ, 11
 バリキャップ・ダイオード, 24
 パルス, 24, 64, 132
 パルス・カウンタ方式, 132
 パルス波形, 46
 搬送波, 115
 搬送波抑圧, 121
 搬送波抑圧変調器, 121

 PN 接合, 23
 PLL, 2
 ピコアンペア, 25
 歪み, 69
 非線形, 19, 30, 95, 120
 非線形性, 95
 非線形歪, 55
 微分器, 92
 微分方程式, 20
 標準化, 7

 feedback, 67
 feedforward, 67
 フィルタ, 2, 8, 55, 128
 フーリエ解析, 20, 114
 フーリエ変換, 92
 Foster-Seeley 回路, 128
 複素電力, 125
 復調, 113
 負性インピーダンス, 102
 物理定数, 3
 Blackman のインピーダンス公式, 77
 Blackman の公式, 98
 Blackman の定理, 71
 フリーラン周波数, 111
 プリエンファンス, 126
 フリッカー雑音, 49, 53
 ブリッジ, 15, 124
 ブリッジ回路, 14, 125
 ブレークダウン, 25

プロセス, 38

分離層, 34

ベア性, 9

平行変調器, 121

閉ループ利得, 68

ベース, 41

ベース抵抗, 33

ベース幅, 34

ベース・バンド, 133

ベースバンド, 113, 115, 119, 128

ベースバンド信号, 114, 134

bessel 関数, 118

ヘテロ接合, 21

変換器利得, 48

変調, 113

変復調器, 45, 113

変復調方式, 113

包絡線, 127

飽和状態, 36

飽和領域, 35

ボード線図, 83

ホール, 50

ポップコーン雑音, 54

ポップコーン雑音, 49

ホモ接合, 21

ホワイト雑音, 49

ボンディング・ワイヤ, 23

マイクロ波, 19, 102

-1 [dB], 63

メサ型, 9

MESFET, 28

メモリ, 13

MOS, 36

MOSFET, 27

MOS モデル, 36

モデム, 3

有効数字, 17

有能電力, 53

有能電力利得, 49

揺らぎ, 51

陽極同調, 108

容量, 14

余弦関数, 114

弱い歪, 56

四端子, 19

四端子網, 49, 75, 100

ラプラス変換, 20

リアクタンス管, 123, 124

Leeson, 106

理想演算増幅器, 87

利得, 48

利得余裕, 84

リミッタ, 106

リングング, 65

リング・オシレータ, 110, 111

Ring 変調, 121

Ring 変調器, 121

ループ利得, 68, 71, 72, 74, 78, 79

レベルシフト回路, 23

著者紹介

新原 盛太郎（しんばら せいたろう）

1948年8月	山口県徳山市に生まれる（本籍は博多区須崎）
1972年3月	九州大学工学部卒業
同 年 4月	東京大学工学部 青木研究室
1973年4月	東京芝浦電気入社
1989年10月	CADENCE 社（USA）に1年間駐在
1990年4月	東芝半導体事業部
2008年4月	東京工芸大学 非常勤講師
同 年 8月	東芝退社
2019年3月	東京工芸大学退任

[特許]

US 5件登録、EU 2件登録、国内特許約50件以上

[著作]

「ダイオード/トランジスタ/FET 活用入門」 CQ 出版 1987年

「SPICE とデバイス・モデル」 CQ 出版 2005年

「間違いが多い電気知識」東京図書出版 2018年

「基礎電気回路」Amazon・電子書籍 2019年

「アナログ回路設計法」Amazon・ペーパーバック 2022年

「設計のための電気」Amazon・ペーパーバック 2022年

2023年（令和5年）2月 初版発行

Copyright © 2023 新原 盛太郎

All rights reserved